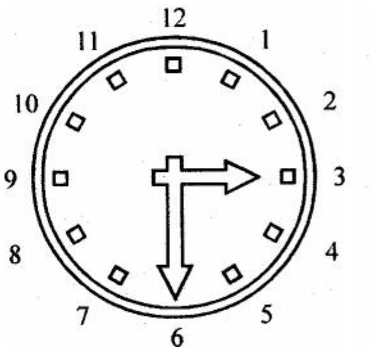
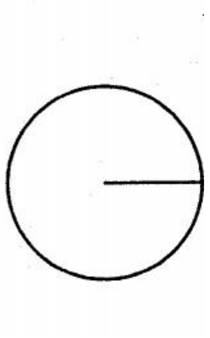
୧୧

ବୃତ୍ତ (Circles)

ଏକ ଘଣ୍ଟାର କଣ୍ଟାଗୁଡ଼ିକର ଅଗ୍ରଭାଗର ଗତିପଥକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର (ଚିତ୍ର 11.1) ।



ଚିତ୍ର 11.1



ଚିତ୍ର 11.2

ଗୋଟିଏ ସୂତାର ଗୋଟିଏ ମୁଣ୍ଡରେ କଣ୍ଟାଟିଏ ବାନ୍ଧ ଓ ଅନ୍ୟ ମୁଣ୍ଡରେ ପେନ୍‌ସିଲ୍‌ଟିଏ ବାନ୍ଧ, କଣ୍ଟାଟିକୁ ଖଣ୍ଡେ କାଗଜ ଉପରେ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ରଖି ଚାପି ଧର ଓ ପେନ୍‌ସିଲ୍‌କୁ ଟାଣି ଧରି କାଗଜ ଉପରେ ବୁଲାଅ । ଯେଉଁ ବକ୍ର ରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କିତ ହେବ ତାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର (ଚିତ୍ର 11.2) ।

ଏହା ନିସନ୍ଦେହ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଅନୁରେଖିତ ସମସ୍ତ ବକ୍ରରେଖା ଏକ ପ୍ରକାର ଆକୃତିର ଓ ଏହିପରି ବକ୍ରରେଖାକୁ ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ ।

କାଗଜ ଉପରେ କଣ୍ଟା ଲାଗି ରହିଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର କହନ୍ତି ଏବଂ ପେନସିଲ୍‌ର ଅଗ୍ରଭାଗ ଓ କଣ୍ଟା ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତାକୁ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରେ ଅନୁରେଖିତ ବକ୍ରରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆହୁରି ବିସ୍ତାରିତ ଭାବରେ ଆଲୋଚନା ଆମେ କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅଧ୍ୟୟନପରେ ତୁମେ

- ଦତ୍ତ କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ;

- କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଘାତୀ ସମୀକରଣ ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଉପସ୍ଥାପନ କରେ, ତାହା ଅଭିବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବ;
- ସାଧାରଣ ରୂପରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଏକ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣରୁ, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ଏକ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ, ଯାହା

  (i) ତିନିଗୋଟି ନୈକରେଖୀ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହୋଇଥିବ (ii) ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବା ସହ କୌଣସି ଅକ୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବ;
- ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାସର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ଏବଂ
- କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ବୃତ୍ତର ପ୍ରାଚଳିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Parametric representaion) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ବୃତ୍ତ ସହିତ ସଂପର୍କିତ ପଦ ଓ ଧାରଣା
- ଦତ୍ତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା
- ବିଭିନ୍ନ ରୂପରେ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ

11.1 ବୃତ୍ତର ସଂଜ୍ଞା

ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଓ ସେହି ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥକୁ ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁକୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାକୁ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

11.2 ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ (Equation of a Circle)

ଏକ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତ ଲାଗି ଏକ ଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା କି ? ଆସ ବିଭିନ୍ନ ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତରେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଉଦ୍ୟମ କରିବା ।

11.2.1 ଯେତେବେଳେ କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ଥାଏ ।

ମନେକର ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର C ଓ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ a ଏକକ ।

କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ (h, k) କୁହ ।

ବୃତ୍ତ ଉପରେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P(x, y) ନିଅ ଓ

x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ CM ଓ PM ଅଙ୍କନ କର ।

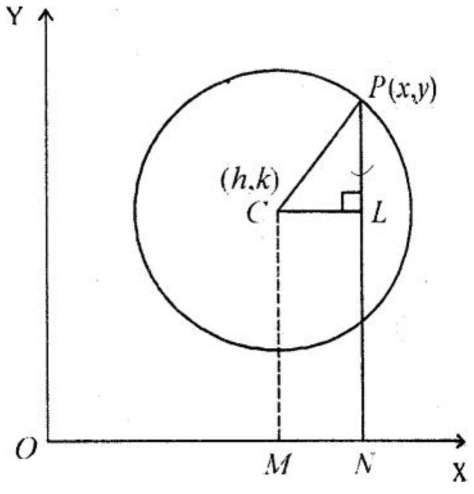
ପୁନଶ୍ଚ PN ପ୍ରତିଲମ୍ବ CL ଅଙ୍କନ କର ।

ଆମେ ପାଇବା $CL = MN = ON - OM = x - h$

ଓ $PL = PN - LN = PN - CM = y - k$

ସମକୋଣୀ Δ CPL ରେ $CL^2 + PL^2 = CP^2$

$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ ...(1)



ଚିତ୍ର 11.3

ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତରେ ଏହା ହିଁ ବୃତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ।

ବୃତ୍ତର ଏହି ରୂପକୁ ବୃତ୍ତର ମାନକ ରୂପ (Standard form) କୁହାଯାଏ ।

ବିପରୀତ ଭାବରେ, ଯଦି ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ (x, y) କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ଯାହା (1) କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ, ତେବେ ଏହା (h, k) ଠାରୁ a ଏକକ ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ । ତେଣୁ ଏହା ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ ।

କ'ଣ ହେବ, ଯେତେବେଳେ

(i) ବୃତ୍ତ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଗାମୀ ହୁଏ ?

(ii) ବୃତ୍ତ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇନଥାଏ ଓ କେନ୍ଦ୍ର x- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଥାଏ ?

(iii) ବୃତ୍ତ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଓ ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାସ, x- ଅକ୍ଷ ସହ ମିଳିଯାଇଥାଏ ?

(iv) ମୂଳବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହୋଇଥାଏ ?

(v) ବୃତ୍ତ x- ଅକ୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥାଏ ?

(vi) ବୃତ୍ତ y- ଅକ୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥାଏ ?

(vii) ବୃତ୍ତ ଉଭୟ ଅକ୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥାଏ ?

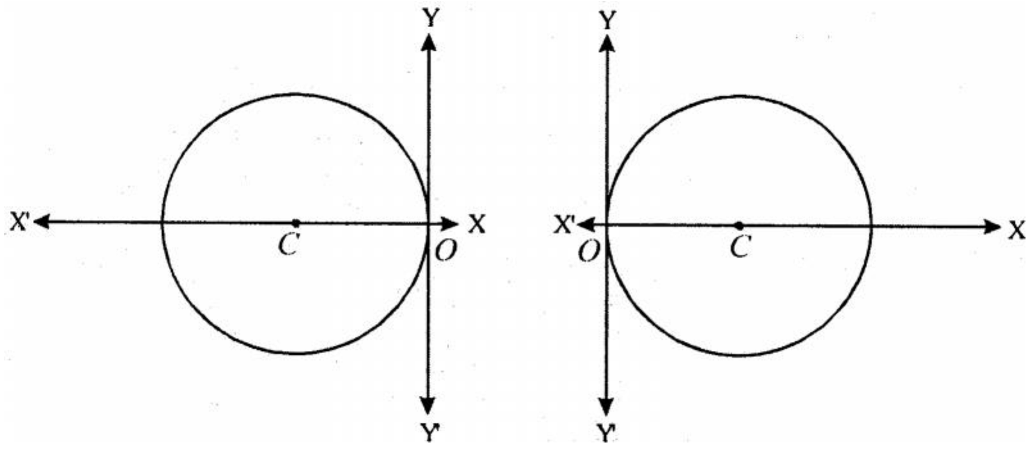
ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଗୋଟିକ ପରେ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

(i) ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ, ଯେହେତୁ (0, 0) ସ୍ଥାନାଙ୍କ, (1) କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ, ଏଣୁ ଆମେ ପାଇବା

$h^2 + k^2 = a^2$

ତେଣୁ ସମୀକରଣ (1) ର ପରିବର୍ତ୍ତିତ ରୂପ ହେବ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$ ... (2)

(ii) ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $k = 0$; ଏଣୁ ସମୀକରଣ (1) ର ରୂପ ହେବ $(x - h)^2 + y^2 = a^2$... (3)



ଚିତ୍ର 11.4

(iii) ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $k = 0$ ଓ $h = \pm a$ (ଚିତ୍ର11.4)

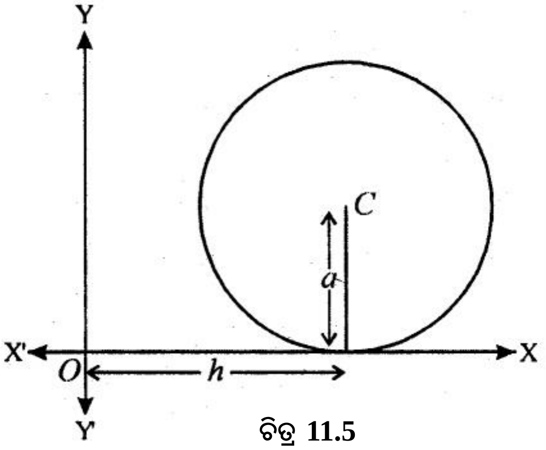
ତେଣୁ, ସମୀକରଣ (1) ର ରୂପ ହେବ $x^2 + y^2 \pm 2ax = 0$ ...(4)

(iv) ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $h = 0 = k$

ତେଣୁ, ସମୀକରଣ (1) ର ରୂପ ହେବ $x^2 + y^2 = a^2$ ....(5)

(v) ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $k = a$ (ଚିତ୍ର 11.5)

ଏଣୁ ସମୀକରଣ (1) ର ରୂପ ହେବ $x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0$ ....(6)



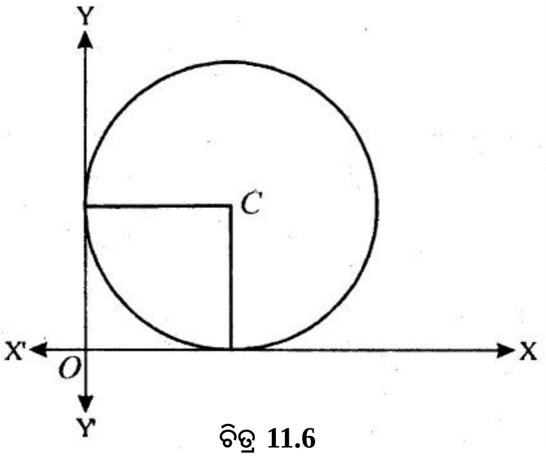
ଚିତ୍ର 11.5

(vi) ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $h = a$,

ଏଣୁ ସମୀକରଣ (1) ର ରୂପ ହେବ $x^2 + y^2 - 2ax - 2ky + k^2 = 0$ ...(7)

(vii) ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $h = k = a$ (ଚିତ୍ର 11.5 ଦେଖ)

ଏଣୁ ସମୀକରଣ (1) ର ରୂପ ହେବ $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ ....(8)



ଚିତ୍ର 11.6

ଉଦାହରଣ 11.1 ଯେଉଁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (3, –4) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 6, ସେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସମୀକରଣ (1) ର ପଦମାନଙ୍କ ସହ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$h = 3, k = -4,$ ଓ $a = 6$

$\therefore$ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 6^2$

କିମ୍ବା, $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

ଉଦାହରଣ 11.2 ବୃତ୍ତ $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ ର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣକୁ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ ସହ ତୁଳନା କଲେ ପାଇବା

$-h = 1, -k = -1, a^2 = 4$

$\therefore h = -1, k = 1, a = 2$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (–1, 1) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 2 ।

11.3 ବୃତ୍ତର ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ (General Equation of the circle in second degree in two variables)

କେନ୍ଦ୍ର (h, k) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ମାନକ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ .....(1)

କିମ୍ବା, $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ ...(2)

ଏହାର ଆକୃତି ହେଲା $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ...(3)

$\Rightarrow (x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 - c$

$\Rightarrow (x+g)^2 + (y+f)^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$

$\Rightarrow [x-(-g)]^2 + [y-(-f)]^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$ ...(4)

$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ଯେଉଁଠି, $h = -g, k = -f, r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

ଏହା ଦର୍ଶାଏ ଯେ, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (–g, –f) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

11.3.1 ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଘାତୀ ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ପରିପ୍ରକାଶ କରିବାର ସର୍ତ୍ତ ।

ମନେକର ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

(i) ଏହା x ଓ y ର ଏକ ଦୁଇଘାତୀ ସମୀକରଣ ଯାହାର x^2 ଓ y^2 ର ସହଗ ସମାନ ।

(ii) ଏଠାରେ xy ଥିବା କୌଣସି ପଦ ନାହିଁ ।

ଟୀକା : ଏହି ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମେ x^2 ଓ y^2 ର ସହଗ ଏକ ନେବା ।

ଉଦାହରଣ 11.3 ବୃତ୍ତ $45x^2 + 45y^2 - 60x + 36y + 19 = 0$ ର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : 45 ଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରୁ ଭାଗ କଲେ ପାଇବା

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{5}y + \frac{19}{45} = 0$$

ଏହାକୁ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ସହ ତୁଳନା କଲେ, ପାଇବା

$$g = -\frac{2}{3},\ f = \frac{2}{5} \text{ ଓ } c = \frac{19}{45}$$

ଏହିପରି ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}\right)$ ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \frac{\sqrt{41}}{15}$

ଉଦାହରଣ 11.4 (1, 0), (0, –6) ଓ (3, 4) ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣଟି ମନେକର

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1)

ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତଟି ତିନିଗୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଛି, ସେଗୁଡ଼ିକ ସମୀକରଣ (1) କୁ ସିଦ୍ଧ କରିବେ ।

ତେଣୁ, $1 + 2g + c = 0$...(2)

$36 - 12f + c = 0$ ... (3)

ଓ $25 + 6g + 8fc + c = 0$ ...(4)

(2) କୁ (3) ରୁ ଓ (3) କୁ (4) ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$2g + 12f = 35$

ଏବଂ $6g + 20f = 11$

ଏହି ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ g ଓ f ପାଇଁ ସମାଧାନ କଲେ, ପାଇବା

$$g = -\frac{71}{4},\ f = \frac{47}{8}$$

g ର ମାନକୁ (2) ରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା $c = \frac{69}{2}$

ଏବଂ g, f ଓ c ର ମାନକୁ (1) ରେ ବସାଇଲେ, ବୃତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣଟି ହେବ

$$4x^2 + 4y^2 - 142x + 47y + 138 = 0$$

ଉଦାହରଣ 11.5 (1, –2) ଓ (3, –4) ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏବଂ x- ଅକ୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତ x- ଅକ୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରେ, ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ମାନକ ରୂପରେ k = a ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0 \quad \ldots (1)$$

ବୃତ୍ତ (1, –2) ବିନ୍ଦୁଗାମୀ

$$\therefore\ h^2 - 2h + 4a + 5 = 0 \quad \ldots(2)$$

ଏବଂ ବୃତ୍ତ (3, –4) ବିନ୍ଦୁଗାମୀ

$$\therefore\ h^2 - 6h + 8a + 25 = 0 \quad \ldots(3)$$

(2) ଓ (3) ରୁ ‘a’ କୁ ଅପସାରଣ କଲେ, ପାଇବା

$$\Rightarrow h^2 + 2h - 15 = 0$$

h = 3 କିମ୍ବା h = –5

(3) ରୁ a ର ଅନୁରୂପ ମାନ ସବୁ ଯଥାକ୍ରମେ ହେବ –2 ଓ 10 । h ଓ a ର ମାନକୁ (1) ରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ପାଇବା

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0 \quad \ldots(4)$$

ଓ $x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0 \quad \ldots(5)$

(4) ଓ (5) ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣକୁ ପରିପ୍ରକାଶ କରେ ।

11.4 ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ (Equation of a circle when end points of one of its diameters are given)

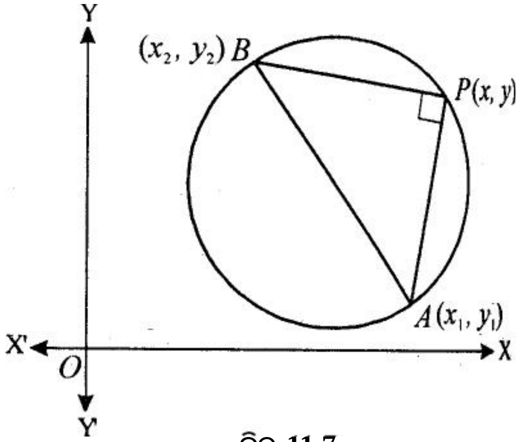
ମନେକର A (x_1, y_1) ଓ B (x_2, y_2) ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସ AB ର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (ଚିତ୍ର 11.7 ଦେଖ) ।

ମନେକର P(x, y), AB ବ୍ୟାସ ନେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । AP ଓ BP କୁ ଯୋଗ କର ।

ଯେହେତୁ ଅର୍ଦ୍ଧ ବୃତ୍ତରେ ଅର୍ନ୍ତଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ

$\therefore AP \perp BP$

$\therefore$ (AP ର ସ୍ଲୋପ୍) $\times$ (BPର ସ୍ଲୋପ୍) $= -1$



ଚିତ୍ର 11.7

ବର୍ତ୍ତମାନ AP ର ସ୍ଲୋପ୍ $= \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

ଏବଂ BP ର ସ୍ଲୋପ୍ $= \dfrac{y-y_2}{x-x_2}$

$$\therefore \left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right) \times \left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$$

କିମ୍ବା $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$ ...(1)

ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ସମୀକରଣ (1) ସତ୍ୟ, ଏବଂ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ନୁହଁ

$\therefore$ ସମୀକରଣ (1), ବ୍ୟାସ ରୂପରେ ଏକ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣକୁ ପରିପ୍ରକାଶ କରେ ।

ଉଦାହରଣ 11.6 ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ଓ (2, –4) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବ୍ୟାସ ନେଇ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = 2, y_2 = -4$ ଅଟେ ।

ସମୀକରଣ (1) ର ବ୍ୟବହାରରେ, ବୃତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି

$(x-0)(x-2) + (y-0)[y-(-4)] = 0$

କିମ୍ବା, $x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0$

କିମ୍ବା, $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

ଉଦାହରଣ 11.7 ଏକ ବୃତ୍ତ $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ର ଏକ ଜ୍ୟାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $y = mx$ । ଉକ୍ତ ଜ୍ୟାକୁ ବ୍ୟାସ ନେଇ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ବୃତ୍ତ ଓ ଜ୍ୟାର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କଗୁଡ଼ିକ ହେଲା (0, 0) ଏବଂ $\left(\dfrac{2a}{1+m^2}, \dfrac{2ma}{1+m^2}\right)$

ବର୍ତ୍ତମାନ , ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଲେ, ସମୀକରଣ (1) ଅନୁଯାୟୀ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ହେଲା

$$(x-0)\left(x-\frac{2a}{1+m^2}\right) + (y-0)\left(y-\frac{2ma}{1+m^2}\right) = 0$$

କିମ୍ବା, $x^2 + y^2 - \frac{2a}{1+m^2}x - \frac{2m}{1+m^2}y = 0$

କିମ୍ବା, $(1 + m^2) x^2 + (1 + m^2) y^2 - 2ax - 2may = 0$

ଏହା ହେଉଛି ବୃତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ।

11.5 ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଏହାର ଆନତି ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ (ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ) (Equation of a circle when a radius and its inclination are given parametric form)

କୌଣସି ବୃତ୍ତ ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r, ତାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ମନେକର P(x, y) ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $PM \perp OX$ ଅଙ୍କନ କର ।

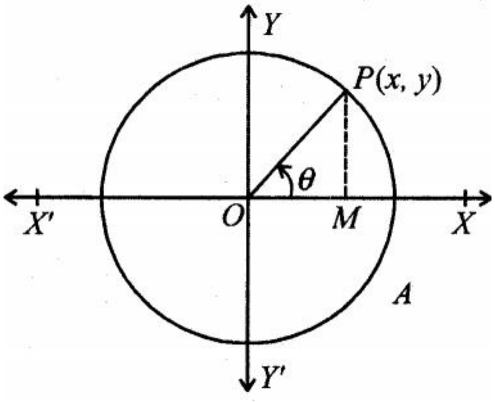
$\therefore$ OM = x, MP = y, OP ଯୋଗ କର ।

ମନେକର $\angle XOP = \theta$ ଓ OP = r

ବର୍ତ୍ତମାନ $x = OM = r\cos\theta$

ଏବଂ $y = MP = r\sin\theta$

ଏଣୁ, ଉଭୟ ସମୀକରଣ $x = r\cos\theta$ ଓ $y = r\sin\theta$ କୁ ଏକା ସଙ୍ଗେ ନେଲେ, ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ଉପସ୍ଥାପିତ ହୁଏ ।



ଚିତ୍ର 11.8

ଏହା ବୃତ୍ତର **ସମୀକରଣର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ,** ଯେଉଁଠି θ ପ୍ରାଚଳ ଅଟେ ।

ଟୀକା : ଯଦି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (h, k) ହୁଏ, ତେବେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ $x = h + r\cos\theta$ ଓ $y = k + r\sin\theta$ ହେବ, ଯେଉଁଠି θ କୁ ପ୍ରାଚଳ କୁହାଯାଏ ଯାହା $[0, 2\pi]$ ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଉଦାହରଣ 11.8 ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୃତ୍ତର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ (ii) $(x + 2)(x - 4) + (y - 3)(y + 1) = 0$

ସମାଧାନ : (i) ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

ଏହାକୁ ବୃତ୍ତର ମାନକ ସମୀକରଣ ସହ ତୁଳନା କଲେ,

ଆମେ ପାଇବା, ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (1, –2) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 3 ।

$\therefore$ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ ହେଲା

$x = 1 + 3\cos\theta;\ y = -2 + \ \sin\theta$

(ii) ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣଟି

$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 11 = 0$

ଏହାକୁ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ରୂପ ସହ ତୁଳନା କଲେ ଏବଂ କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

କେନ୍ଦ୍ର, (1, 1) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{13}$

∴ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ ହେଲା

$$x = 1 + \sqrt{13}\cos\theta,\ y = 1 + \sqrt{13}\ \sin\theta$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 11.1

1. ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର, ଯାହାର

   (a) କେନ୍ଦ୍ର (0, 0) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 3 ଏକକ

   (b) କେନ୍ଦ୍ର (–2, 3) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 4 ଏକକ

2. ନିମ୍ନ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $x^2 + y^2 + 3x - y = 6$, (b) $4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$

3. (0, 2), (2, 0) ଓ (0, 0) ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଯେଉଁ ବୃତ୍ତ y- ଅକ୍ଷକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରେ ଏବଂ (–1, 2) ଓ (–2, 1) ବିନ୍ଦୁଗାମୀ, ସେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. (2, 3) ଓ (–2, 6) ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଥିବା ବ୍ୟାସ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣକୁ ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

   (b) $4x^2 + 4y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

   (c) $(x - 1)(x + 1) + (y - 1)(y + 1) = 0$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- (h, k) **କେନ୍ଦ୍ର ଓ a ବ୍ୟାସର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ମାନକରୂପ** $(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$
- ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ରୂପ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ । ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର (–g, –f) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$
- **ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ରୂପ**

  ଯଦି ବ୍ୟାସର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) ହୁଏ ତେବେ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣଟି ହେବ

  $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$

- **ବୃତ୍ତର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ**

  ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (0, 0) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = a ଏକକ ହେଲେ, ବୃତ୍ତର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ ହେଉଛି

  $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$

  ଯଦି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (h, k) ହୁଏ, ତେବେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରାଚଳିକ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

  $x = h + a \cos \theta$ ଓ $y = k + a \sin \theta$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

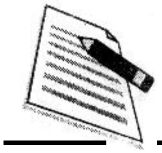
ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. କେନ୍ଦ୍ର (4, –6) ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 7 ଏକକ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. (1, 0), (–1, 0) ଓ (0, 1) ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ପ୍ରାଚଳିକ ରୂପ ଲେଖ ।

   (a) $x^2 + y^2 = 3$ (b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 12$

ମଡ୍ୟୁଲ-II

ନିର୍ଦ୍ଦେଶାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି



ଟିପ୍ପଣୀ

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 11.1

1. (a) $x^2 + y^2 = 9$ (b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$

2. (a) $\left(-\frac{3}{2}, 1\right); \frac{\sqrt{37}}{2}$ (b) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right); \frac{\sqrt{109}}{8}$

3. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

4. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

5. $x^2 + y^2 - 9y + 14 = 0$

6. (a) $x = -1 + 2\cos\theta$ ଓ $y = -1 + 2\sin\theta$

   (b) $x = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{7}{8}}\cos\theta$ $y = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{7}{8}}\sin\theta$

   (c) $x = \sqrt{2}\cos\theta$ ଓ $y = \sqrt{2}\sin\theta$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ :

1. $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 3 = 0$

2. କେନ୍ଦ୍ର (–2, 3); ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{13}$

3. $x^2 + y^2 = 1$

4. (a) $x = \sqrt{3}\cos\theta, \; y = \sqrt{3}\sin\theta$

   (b) $x = 2 + 5\cos\theta, \; y = -2 + 5\sin\theta$