୧୨

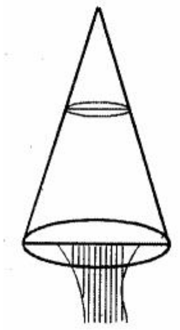
ସଙ୍କୁ ବିଭାଗ (କୋନ୍)
(Conic Sections)

ଗାଜରକୁ କାଟିବା ସମୟରେ, ତୁମେ କଟା ପାଖର ଧାରରେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଆକୃତି ଦେଖିଥିବ । ଏହାକୁ ତିନି ପ୍ରକାରରେ କଟାଯାଇପାରିବ, ଯଥା

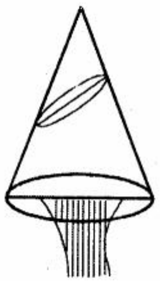
(i) ପ୍ରସ୍ଥଚ୍ଛେଦ ଆଧାର ସହ ସମାନ୍ତର (ଚିତ୍ର 12.1 ଦେଖ)

(ii) ପ୍ରସ୍ଥଚ୍ଛେଦ ତେରଛା ଥିବ ମାତ୍ର ଆଧାର ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଯାଇ ନଥିବ (ଚିତ୍ର 12.2 ଦେଖ)

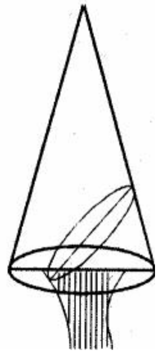
(iii) ପ୍ରସ୍ଥଚ୍ଛେଦ ତେରଛା ଥିବ ଓ ଆଧାର ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବ (ଚିତ୍ର 12.3 ଦେଖ)



ଚିତ୍ର 12.1



ଚିତ୍ର 12.2



ଚିତ୍ର 12.3

ଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରରେ କାଟିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଆକୃତିର ଖଣ୍ଡ ପାଇବା । ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରରେ କଟା ପାଖର ଧାର ଏକ ବୃତ୍ତ ନିରୂପଣ କରେ, ଯାହାକୁ ଆମେ ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପଢ଼ିଛନ୍ତି ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଏବଂ ତୃତୀୟ ସ୍ଥିତିରେ, କଟା ପାଖର ଧାର ବିଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାମିତିକ ବକ୍ର ନିରୂପଣ କରେ, ଯାହା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ପଢ଼ିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ଅଧ୍ୟୟନ କଲା ପରେ, ତୁମେ

- ଏକ ବୃତ୍ତ, ପାରାବୋଲା ଓ ଉପବୃତ୍ତ (Ellipse) କୁ କୋନ୍‌ର ଏକ ପ୍ରସ୍ଥଚ୍ଛେଦ ରୂପେ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବ;
- ପାରାବୋଲା ଓ ଉପବୃତ୍ତକୁ ସଂଚାର ପଥ ରୂପେ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବ
- ଉତ୍‌କେନ୍ଦ୍ରତା (Ellipse), ନିୟାମକ ରେଖା (Directrix), ଫୋକସ୍ ଓ ଶୀର୍ଷର ଧାରଣା କରିପାରିବ;
- ପାରାବୋଲା ଓ ଉପବୃତ୍ତ (Ellipse)ର ମାନକ ସମୀକରଣ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବ ଏବଂ
- ନିୟାମକ ରେଖା ଓ ଫୋକସ୍ ଦତ୍ତଥିଲେ, ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ନିରୂପଣ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ମୌଳିକ ଜ୍ଞାନ
- ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣର ବିଭିନ୍ନ ରୂପ
- ବୃତ୍ତର ବିଭିନ୍ନ ରୂପ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ

12.1 ସଙ୍କୁ ବିଭାଗ (Conic section)

ଉପକ୍ରମରେ ଆମେ ଗାଜରର କଟାଯାଇଥିବା ଖଣ୍ଡର, କେତେକ ଆକୃତି ଦେଖିଲେ । ଯେହେତୁ ଗାଜରର ଆକୃତି ସଙ୍କୁ ପରି, ତେଣୁ ଏଥିରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ଖଣ୍ଡକୁ ଏକ ସଙ୍କୁର ଖଣ୍ଡ ବୋଲି କହିବା ।

ଗଣିତ ଦୃଷ୍ଟିରୁ, ସଙ୍କୁ ବିଭାଗ ହେଉଛି କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ର ସଂଚାର ପଥ, ଯାହା ଏପରି ଗତିକରେ ଯେ, ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା ଓ ଏକ ସ୍ଥିର ରେଖା ଠାରୁ ଏହାର ଲମ୍ବ ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ସର୍ବଦା ସ୍ଥିର ରହେ ।

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁକୁ କୁହାଯାଏ **ଫୋକସ୍** ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାକୁ ନିୟାମକ ରେଖା କୁହାଯାଏ ।

ଫୋକ୍‌ସ ଦେଇ ଓ ନିୟାମକ ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଭାବେ ରହି ଥିବା ରେଖାକୁ **ଅକ୍ଷ** କୁହାଯାଏ । ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସ୍ଥିର ଅନୁପାତକୁ ଉତ୍‌କେନ୍ଦ୍ରତା (Eccentricity) କୁହାଯାଏ ।

କ'ଣ ହୁଏ ଯେତେବେଳେ

(a) $e < 1$ (ii) $e = 1$ (iii) $e > 1$?

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ସଙ୍କୁ ବିଭାଗ (Conic Section)କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଉପବୃତ୍ତ, ପାରାବୋଲା ଓ ହାଇପାରାବୋଲା ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଏ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ କେବଳ ଉପବୃତ୍ତ ଓ ପାରାବୋଲା ବିଷୟରେ ପଢ଼ିବା ।

12.2 ଉପବୃତ୍ତ (Ellipse)

ପୁଣିଥରେ ଗାଜର ଖଣ୍ଡ କାଟିବା କଥା ମନେପକାଅ । ଆମେ ଯେତେବେଳେ ଏହାକୁ ତେରେଛା କରି କାଟନ୍ତି, ଛୁରି ଆଧାର ଦେଇ ନଗଲେ କ'ଣ ହୁଏ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ।

ଏକ ସିଝା ଅଣ୍ଡାକୁ ଲମ୍ବଭାବରେ କାଟିବା ସମୟରେ, ଏହିପରି ଆକୃତିର ସମ୍ମୁଖୀନ ହୋଇଥିବ ।

ଏହିପରି ମିଳୁଥିବା କଟା ଗାଜର ଖଣ୍ଡର ଧାର ଏକ ଉପବୃତ୍ତକୁ ପରିପ୍ରକାଶ କରେ ।

ଆମ ଗଣିତ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଉପବୃତ୍ତକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବା ।

ଉପବୃତ୍ତ ହେଉଛି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସମତଳରେ ଏପରି ଗତି କରେ ଯେ, ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା ଓ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ସର୍ବଦା ସମାନ ରହେ ଏବଂ ଏହି ଅନୁପାତ ସର୍ବଦା 1 ରୁ କମ୍ ହୁଏ ।

12.2.1 ଏକ ଉପବୃତ୍ତର ମାନକ ସମୀକରଣ

ମନେକର S ଫୋକସ୍, ZK ନିୟାମକ ରେଖା ଓ P ଏକ ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁ ।

S ରୁ ନିୟାମକ ରେଖା ଉପରେ SK ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । ମନେକର e ଉତ୍‌କେନ୍ଦ୍ରତା ଅଟେ ।

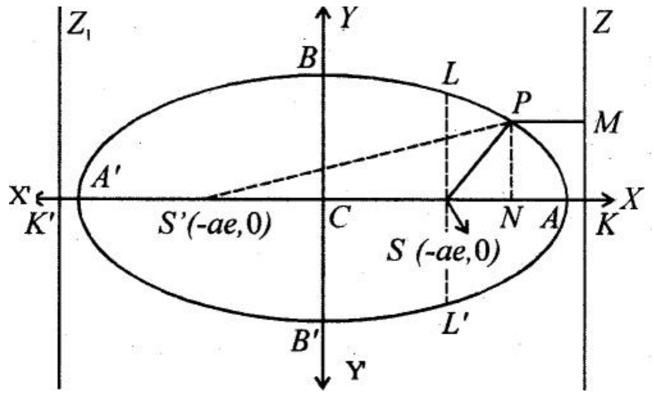
SK କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ A^1 ରେ e : 1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତଃ ଓ ବହିଃ ବିଭାଜନ (KS କୁ ବଢ଼ାଇ) କର ।

ଯେପରି $e < 1$

$$SA = e \cdot AK \quad \ldots (1)$$

ଓ $$SA' = e \cdot A'K \quad \ldots (2)$$

ଯେହେତୁ A ଓ A′ ଏପରି ବିନ୍ଦୁ, ଯାହାର ଫୋକସ ଠାରୁ ଦୂରତା ଓ ନିୟାମକ ରେଖା ଠାରୁ ଅନୁରୂପ ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର e ($e < 1$) ହୁଏ ଏବଂ ଏଥିପାଇଁ ଏହା ଉପବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହେ । ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଉପବୃତ୍ତର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 12.4

ମନେକର AA^1, 2a ସହ ସମାନ ଓ C ଏହାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଅର୍ଥାତ୍, $CA = CA^1 = a$

ବିନ୍ଦୁ C କୁ ଉପ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ ।

(1) ଓ (2) କୁ ଯୋଗ କଲେ ପାଇବା

$$SA + SA' = e \cdot AK + e.A'K$$

କିମ୍ବା, $A A' = e\,(CK - CA + A^1C + CK)$

କିମ୍ବା, $2a = e \cdot 2CK$

କିମ୍ବା, $CK = \dfrac{a}{e}$

(2) ରୁ (1) କୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$SA' - SA = e\,(A'K - AK)$

କିମ୍ବା, $(SA + CA') - (CA - CS) = e \cdot A'A$

କିମ୍ବା, $2CS = e \cdot 2a$

କିମ୍ବା, $CS = a\,e$ ...(4)

ଆସ C କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ, CAX କୁ x- ଅକ୍ଷ ଓ CX ପ୍ରତି ଲମ୍ବ CYକୁ y- ଅକ୍ଷ ରୂପେ ନେବା

$\therefore$ S ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (ae, 0) ଓ ନିୟାମକ ରେଖାର ସମୀକରଣଟି $x = \frac{a}{e}$ ହେବ ।

ମନେକର, ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) । S ଓ P ଯୋଗ କର ଓ $PM \perp ZK$ ଅଙ୍କନ କର ।

ସଂଜ୍ଞା ଦ୍ୱାରା $SP = e \cdot PM$

କିମ୍ବା, $SP^2 = e^2 \cdot PM^2$

କିମ୍ବା, $SN^2 + NP^2 = e^2 \cdot (NK)^2$

କିମ୍ବା, $(CN - CS)^2 + NP^2 = e^2 \cdot (CK - CN)^2$

କିମ୍ବା, $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$

କିମ୍ବା, $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$

କିମ୍ବା, $x^2\,(1 - e^2) + y^2 = a^2\,(1 - e^2)$

କିମ୍ବା, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ [$a^2\,(1 - e^2)$ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ]

$a^2\,(1 - e^2) = b^2$ ନେଲେ, ଆମେ ଉପବୃତ୍ତର ସମୀକରଣର ମାନକ ରୂପ ପାଇବା $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷ (Major axis) : ଶୀର୍ଷ A′ ଓ A କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅର୍ଥାତ୍, A′A କୁ ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2a ଅଟେ ।

ଲଘୁ ଅକ୍ଷ (Minor axis) : କେନ୍ଦ୍ର ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଓ ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଭାବରେ ଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ B′B କୁ ଲଘୁ ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2b ଅଟେ ।

ପ୍ରଧାନ ଅକ୍ଷ (Principal axis) : ଦୁଇ ଅକ୍ଷ (ଦୀର୍ଘ ଓ ଲଘୁ) ଉଭୟକୁ ଉପବୃତ୍ତର ପ୍ରଧାନ ଅକ୍ଷ (Principal axis) କୁହନ୍ତି ।

ନାଭିଲମ୍ବ (Latus rectum) : LL′ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ନାଭିଲମ୍ବ (Latus rectum) କୁହାଯାଏ ।

ନିୟାମକ ରେଖାର ସମୀକରଣ : $x = \pm\frac{a}{e}$

ଉତ୍କେନ୍ଦ୍ରତା : e ଏକରାଶି ଯେପରିକି $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ ।

ଉଦାହରଣ 12.1 ଯେଉଁ ଏଲିପ୍ସର ଫୋକ୍ସ (1, –1), ଉତ୍କେନ୍ଦ୍ରତା $e = \frac{1}{2}$ ଓ ନିୟାମକ ରେଖା ହେଉଛି x – y = 3, ସେହି ଉପବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର P (h, k) ଉପବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ତେବେ ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ ଫୋକ୍ସ ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା = e । ନିୟାମକ ରେଖା ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା SP ଏବଂ

$SP^2 = e^2 \cdot PM^2$

(P ବିନ୍ଦୁରୁ ନିୟାମକ ରେଖା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ M)

କିମ୍ବା, $(h-1)^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h-k-3}{\sqrt{1+1}}\right)^2$

କିମ୍ବା, $7(h^2 + k^2) + 2hk - 10h + 10k + 7 = 0$

∴ P ର ସଂଚାର ପଥ ହେଉଛି

$7(x^2 + y^2) + 2xy - 10x + 10y + 7 = 0$

ଯାହା ଉପବୃତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 12.2 ଉପବୃତ୍ତ $3x^2 + 4y^2 = 12$ ର ଉତ୍କେନ୍ଦ୍ର, ଫୋକସ୍ ମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ ଅକ୍ଷ ମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଉପବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

ଏହାକୁ ଉପବୃତ୍ତର ମାନକ ସମୀକରଣ ସହ ତୁଳନା କଲେ ପାଇବା $a^2 = 4$ ଓ $b^2 = 3$, ତେବେ

(i) $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$

(ii) ଫୋକସମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (1, 0) ଓ (–1, 0)

[∵ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକ (± ae, 0)]

(iii) ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 2a = 2 \times 2 = 4$ ଓ

ଲଘୁ ଅକ୍ଷର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= 2b = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 12.1

1. କେନ୍ଦ୍ର (0, 0) ଥିବା ଉପବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

   (a) ଯାହାର ନାଭି-ଲମ୍ବ 5 ଓ ଉତ୍‌କେନ୍ଦ୍ରତା $\frac{2}{3}$

   (b) ଯାହାର ଲଘୁ ଅକ୍ଷ, ଫୋକସମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ସହ ସମାନ ଓ ନାଭିଲମ୍ବ 10 ଅଟେ ।

   (c) ଯାହାର ଫୋକସ୍‌ଗୁଡ଼ିକ (4, 0) ଓ (–4, 0) ଓ ଯାହାର ଉତ୍‌କେନ୍ଦ୍ରତା $\frac{1}{3}$ ଅଟେ ।

2. ଯଦି ଉପବୃତ୍ତର ନାଭିଲମ୍ବ ଲଘୁ ଅକ୍ଷର ଅଧା ହୁଏ ତେବେ ଏହାର ଉତ୍‌କେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12.3 ପାରାବୋଲା (Parabola)

ଗାଜରର କଟାଯାଉଥିବା ଖଣ୍ଡକୁ ପୁନଶ୍ଚ ମନେପକାଅ । ଯେତେବେଳେ ଆମେ ଆଧାର ଦେଇ ଛୁରୀ ଚଳାଇ ଏହାକୁ ତେରଛା କରି କାଟନ୍ତି, ସେତେବେଳେ ଆମେ କ'ଣ ଦେଖନ୍ତି ? ଯେତେବେଳେ ଏକ ବ୍ୟାଟ୍‌ସମ୍ୟାନ ପିଟିଥିବା ବଲଟି ବାୟୁରେ ଗତି କରେ, ବଲ୍‌ର ସେତେବେଳର ଗତିପଥକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିଛ କି ?

କ'ଣ ଗାଜର ଖଣ୍ଡର ଧାର ଓ ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣର ବଲ ଦ୍ୱାରା ଅନୁରେଖିତ ପଥମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣ ଅଛି ?

ହଁ, ଗାଜର ଖଣ୍ଡରଧାର ଓ ବଲ୍‌ର ଗତି ପଥର ଆକୃତି ସମାନ ଅଟେ, ଯାହାକୁ ଆମେ ପାରାବୋଲା କହନ୍ତି । ଆସ ପାରାବୋଲାକୁ ଗଣିତ ଦୃଷ୍ଟିକୋଣରୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବା ।

''ପାରାବୋଲା ହେଉଛି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାରପଥ ଯାହା ଏକ ସମତଳରେ ଏଭଳି ଗତିକରେ ଯେ, ଏହି ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁଟିର ଦୂରତା ସେହି ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ରେଖା ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା ସହ ସମାନ ।

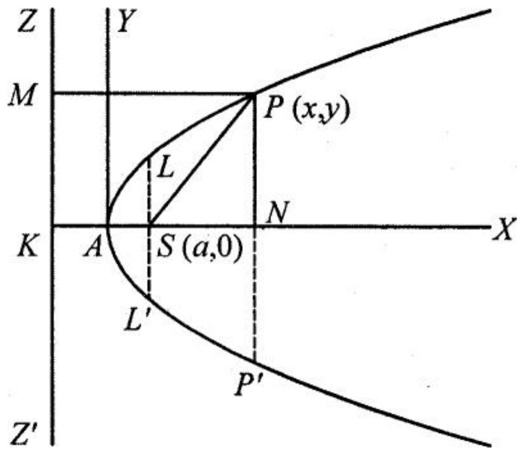
12.3.1 ପାରାବୋଲାର ମାନକ ସମୀକରଣ

ମନେକର S ହେଉଛି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଓ ZZ' ହେଉଛି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ନିୟାମକରେଖା । ZZ' ପ୍ରତି SK ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । SK କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ କର ଏବଂ ପ୍ରାପ୍ତ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ A ନାମ ଦିଅ ।

ଯେହେତୁ SA = AK, ପାରାବୋଲର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ, A ବିନ୍ଦୁ ପାରାବୋଲା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତି । A କୁ ପାରକୋଲାର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

A କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ନିଅ, AX କୁ x- ଅକ୍ଷ ନିଅ ଓ A ବିନ୍ଦୁଦେଇ AX ପ୍ରତିଲମ୍ବ ଲମ୍ବ AY କୁ y- ଅକ୍ଷ ନିଅ ।

ଟିପ୍ପଣୀ



ଚିତ୍ର **12.5**

ମନେକର KS = 2a ∴ AS = AK = a

∴ A ଓ S ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (0, 0) ଓ (a, 0) ।

ମନେକର P (x, y) ପାରବୋଲା ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ।

ବର୍ଦ୍ଧିତ AS ପ୍ରତି PN ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

∴ AN = x ଓ NP = y

SP ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ଓ $PM \perp ZZ'$ ଅଙ୍କନ କର

∴ ପାରାବୋଲର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ

SP = PM

କିମ୍ବା, $SP^2 = PM^2$

କିମ୍ବା, $(x - a)^2 + (y - 0)^2 = (x + a)^2$

[∵ PM = NK = NA + AK = x + a]

କିମ୍ବା, $(x - a)^2 - (x + a)^2 = -y^2$

କିମ୍ବା, $y^2 = 4ax$

ଏହା ହିଁ ପାରାବୋଲର ମାନକ ସମୀକରଣ ।

ଟୀକା : ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣରେ

(i) ଶୀର୍ଷ (0, 0)

(ii) ଫୋକସ୍ (a, 0)

(iii) ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣ y = 0

(iv) ନିୟାମକରେଖାର ସମୀକରଣ x + a = 0

(v) ନାଭିଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4a

12.3.2 ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟରୂପ :

ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ କ'ଣ ହେବ, ଯେତେବେଳେ

(i) ଫୋକସ (–a, 0) ଓ ନିୟାମକ ରେଖା $x - a = 0$

(ii) ଫୋକସ (0, a) ଓ ନିୟାମକ ରେଖା $y + a = 0$

(iii) ଫୋକସ (0, –a) ଓ ନିୟାମକ ରେଖା $y - a = 0$?

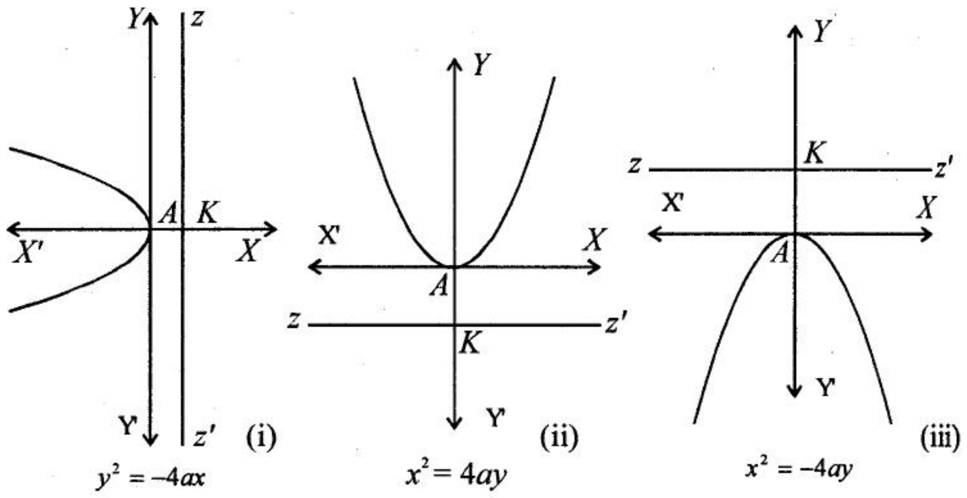
ଏହା ସହଜରେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ଅନୁଯାୟୀ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ନିମ୍ନ ରୂପ ନିଏ ।

(i) $y^2 = -4ax$

(ii) $x^2 = 4ay$

(iii) $x^2 = -4ay$

ପାରାବୋଲାର ଉପରୋକ୍ତ ସମୀକରଣ ପାଇଁ ଏହାର ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।



ଚିତ୍ର 12.6

ଉପରୋକ୍ତ ରୂପ ବିଶିଷ୍ଟ ପାରାବୋଲର ଅନୁରୂପ ଫଳାଫଳ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ

ରୂପ	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
ଶୀର୍ଷର ସ୍ଥାନାଙ୍କ	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
ଫୋକସର ସ୍ଥାନାଙ୍କ	(a, 0)	(–a, 0)	(0, a)	(0, –a)
ନିୟାମକର ସମୀକରଣ	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣ	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
ନାଭି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ	4a	4a	4a	4a

ଉଦାହରଣ 12.3 ଯେଉଁ ପାରାବୋଲାର ଫୋକସ୍ ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଓ ନିୟାମକ ହେଉଛି $2x + y - 1 = 0$ ସରଳରେଖା, ସେହି ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର S (0, 0) ଫୋକସ ଓ ZZ′ ନିୟାମକ ରେଖାର ସମୀକରଣ $2x + y - 1 = 0$

ମନେକର P(x, y), ପାରାବୋଲା ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ

ମନେକର PM ନିୟାମକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ (ଚିତ୍ର 12.5 ଦେଖ)

$\therefore$ ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ SP = PM

କିମ୍ବା, $SP^2 = PM^2$

କିମ୍ବା, $x^2 + y^2 = \dfrac{(2x+y-1)^2}{\left(\sqrt{2^2+1}\right)^2}$

କିମ୍ବା, $5x^2 + 5y^2 = 4x^2 + y^2 + 1 + 4xy - 2y - 4x$

କିମ୍ବା, $x^2 + 4y^2 - 4xy + 2y + 4x - 1 = 0$ ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ।

ଉଦାହରଣ 12.4 ଯେଉଁ ପାରାବୋଲାର ଫୋକସ୍ ହେଉଛି (2, 3) ଓ ଯାହାର ନିୟାମକ ହେଉଛି $x - 4y + 3 = 0$ ସରଳରେଖା, ସେ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$\therefore$ ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣ ପରି

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = \left\{\frac{x-4y+3}{\sqrt{1^2+4^2}}\right\}^2$$

$\Rightarrow 16x^2 + y^2 + 8xy - 74x - 78y + 212 = 0$ ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 12.2

1. ଏକ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର, ଯାହାର ଫୋକସ ହେଉଛି (a, b) ଓ ନିୟାମକ ହେଉଛି $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ ।
2. ଏକ ପାରାବୋଲର ସମୀକରଣ ନିଷ୍ଣୟ କର, ଯାହାର ଫୋକସ ହେଉଛି (2, 3) ଓ ନିୟାମକ ହେଉଛି $3x + 4y = 1$ ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- **ସଙ୍କୁ ବିଭାଗ (Conic Section)**

ସଙ୍କୁ ବିଭାଗ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ର ସଂଚାରପଥ ଯାହା ଏପରି ଗତିକରେ ଯେ, କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତା ଓ ଏକ ସ୍ଥିର ସରଳରେଖା ଠାରୁ ଏହାର ଲମ୍ବ ଦୂରତାର ଅନୁପାତ ସର୍ବଦା ସମାନ ରହେ ।

(i) **ଫୋକସ :** ପୂର୍ବୋକ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁକୁ ଫୋକସ କହନ୍ତି ।

(ii) **ନିୟାମକ :** ପୂର୍ବୋକ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖାକୁ ନିୟାମକ କୁହାଯାଏ ।

(iii) **ଅକ୍ଷ :** ଫୋକସ୍ ଦେଇ ଓ ନିୟାମକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ସରଳରେଖାକୁ ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ।

(iv) **ଉତ୍କେନ୍ଦ୍ରତା :** ଉପରୋକ୍ତ ଅନୁପାତକୁ ଉତ୍କେନ୍ଦ୍ରତା କୁହାଯାଏ ।

(v) **ନାଭିଲମ୍ବ :** ଫୋକସ ଦେଇ ଓ ନିୟାମକ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ ଦ୍ୱିକୋଟୀକୁ ନାଭିଲମ୍ବ କୁହାଯାଏ ।

(ଚିତ୍ର 12.5 ରେ LSL′ ରେଖାଖଣ୍ଡ ନାଭିଲମ୍ବ ଅଟେ)

- **ଉପବୃତ୍ତର ମାନକ ସମୀକରଣ :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

(i) ଉପବୃତ୍ତର ଦୀର୍ଘ ଅକ୍ଷ 2a (ii) ଲଘୁ-ଅକ୍ଷ = 2b

(iii) ନିୟାମକର ସମୀକରଣ $x=\pm\frac{a}{e}$ (iv) ଫୋକସ୍‌ଦ୍ୱୟ $(\pm ae, 0)$

(v) ଉତ୍କେନ୍ଦ୍ରତା ଅର୍ଥାତ୍, e ହେଉଛି $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$ ସମୀକରଣରୁ ନିର୍ଣ୍ଣିତ e ର ମାନ

- **ପାରୋବୋଲାର ମାନକ ସମୀକରଣ :** $y^2 = 4ax$ ।

(i) ଶୀର୍ଷ (0, 0) (ii) ଫୋକସ୍ (a, 0)

(iii) ଅକ୍ଷ y = 0 (iv) ନିୟାମକ x + a = 0

(v) ନାଭିଲମ୍ବ = 4a

- **ପାରାବୋଲାର ଅନ୍ୟ ରୂପ**

(i) $y^2 = -4ax$ ବାମ ଓ ଅବତଳ

(ii) $x^2 = 4ay$ ଉପର ଓ ଅବତଳ

(iii) $x^2 = -4ay$ (ନିମ୍ନ ଓ ଅବତଳ)

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଉପବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) ଫୋକସ୍ (0, 1), ନିୟାମକ $x + y = 0$ ଓ $e = \frac{1}{2}$

   (b) ଫୋକସ୍ (–1, 1), ନିୟାମକ $x - y + 3 = 0$ ଓ $e = \frac{1}{2}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉପବୃତ୍ତର ଫୋକସ୍‌ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ ଉତ୍‌କେନ୍ଦ୍ରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) $4x^2 + 9y^2 = 1$ (b) $25x^2 + 4y^2 = 100$

3. ଯେଉଁ ପାରାବୋଲାର ଫୋକସ୍ (–8, –2) ଓ ନିୟାମକ $y - 2x + 9 = 0$, ସେ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 12.1

1. (a) $20x^2 + 36y^2 = 405$ (b) $x^2 + 2y^2 = 100$

   (c) $8x^2 + 9y^2 = 1152$

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 12.2

1. $(ax - by)^2 - 2a^3x - 2b^3y + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$

2. $6x^2 + 9y^2 - 94x - 142y - 24xy + 324 = 0$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ :

1. (a) $7x^2 + 7y^2 - 2xy - 16y + 8 = 0$

   (b) $7x^2 + 7y^2 + 2xy + 10x - 10y + 7 = 0$

2. (a) $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{6}, 0\right); \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\left(0, \pm\sqrt{21}\right); \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

3. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$