୧୯

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ

ପୂର୍ବ ପାଠରେ ଆମେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ, ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର, ସେମାନଙ୍କର ଲେଖଚିତ୍ରର ବିଶେଷତ୍ୱ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ, ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ, ଗୁଣିତକ ଓ ବିଭାଜିତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମଧ୍ୟ ପଢ଼ିଛୁ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଆମେ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ଓ ସେମାନଙ୍କର ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିବା ପରେ ସେ ସମ୍ପର୍କିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କରିଛୁ ।

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ଜାଣିବା ସହ ତ୍ରିଭୁଜର ଦତ୍ତ ମାପକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଅଜ୍ଞାତ ମାପକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ପଦ୍ଧତି ଜାଣିବୁ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠଟି ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- sine ଓ cosine ସୂତ୍ରର ବ୍ୟୁତ୍ପତ୍ତି କରିପାରିବ,
- ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ କରିପାରିବ;

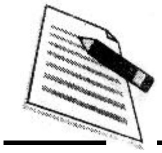
ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଓ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ;
- ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସୂତ୍ର
- ଗୁଣିତକ ଓ ବିଭାଜିତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ।

19.1 sine ସୂତ୍ର

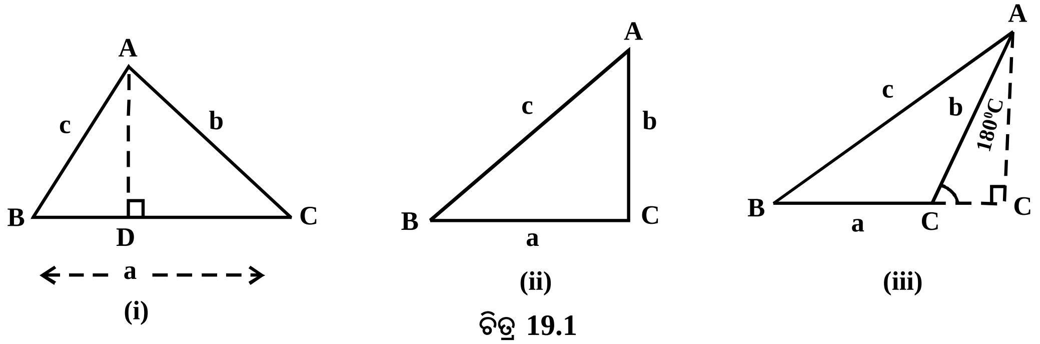
Δ ABCର ଶୀର୍ଷ A, B ଓ C ଠାରେ ଥିବା କୋଣଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ଏବଂ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଶୀର୍ଷଗୁଡ଼ିକର ବିପରୀତ ବାହୁଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଓ c ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଛି । ସେହି କୋଣ ତିନୋଟି ଓ ବାହୁ ତିନୋଟିକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଛଅ ଗୋଟି ଉପାଦାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଫଳାଫଳ 1 : ପ୍ରମାଣ କର, ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସେମାନଙ୍କ ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣମାନଙ୍କର sine ସହ ସମାନୁପାତୀ ।



ଅର୍ଥାତ୍ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 19.1ରେ ABCDରେ [(i), (ii), (iii) ରେ], BC = a, CA = b ଏବଂ AB = c; ପୁନର୍ବାର $\angle C$ (i)ରେ $\angle C$ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ, (ii)ରେ ଏକ ସମକୋଣ ଏବଂ (iii)ରେ $\angle C$ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ।



ଚିତ୍ର 19.1

BC ପ୍ରତି (ବା ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ବର୍ଦ୍ଧିତ BC ପ୍ରତି) ଲମ୍ବ AD ଅଙ୍କନ କର ।

Δ ABD ରେ, $\dfrac{AD}{AB} = \sin B$

ବା, $\dfrac{AD}{c} = \sin B \Rightarrow AD = c\sin B$ ... (i)

Δ ADCରେ, $\dfrac{AD}{AC} = \sin C$ [ଚିତ୍ର 19.1(i) ରେ]

ବା, $\dfrac{AD}{b} = \sin C \Rightarrow AD = b\sin C$ ... (ii)

ଚିତ୍ର 19.1 (ii)ରେ, AD = AC [$\because$ ଏଠାରେ $AC \perp BC$ ଏବଂ ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ $AD \perp BC$]

$\Rightarrow \dfrac{AD}{AC} = 1$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{b} = \sin\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{b} = \sin C$ [$\because$ ଏଠାରେ $\angle C = \dfrac{\pi}{2}$]

$\Rightarrow AD = b \sin C$

ଚିତ୍ର 19.1(iii)ରେ, $\dfrac{AD}{AC} = \sin(\pi - C)$ ବା $AD = b \sin C$

ଏଣୁ ତିନୋଟିଯାକ ଚିତ୍ରରେ, $AD = b \sin C$

ଉକ୍ତି (i) ଓ (ii) ରୁ ଆମେ ପାଇଲେ $c \sin B = b \sin C$

$\Rightarrow \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ ... (iii)

C ଶୀର୍ଷରୁ AB ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରି ଆମେ ପୂର୍ବପରି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \qquad \ldots \text{(iv)}$$

ଉକ୍ତି (iii) ଓ (iv) ରୁ ପାଇବା, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ... (A)

(A) ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସୂତ୍ରକୁ sine ସୂତ୍ର କୁହାଯାଏ ।

(A) ରେ ଥିବା ସୂତ୍ରକୁ ମଧ୍ୟ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \ldots (A')$$

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କେତେକ ମାପ ଦଉଥିଲେ, ଆମେ (A) ବା (A′)ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ଅଜ୍ଞାତ କୋଣ ଏବଂ ବାହୁ ଗୁଡ଼ିକର ମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ଆସ କିଛି ଉଦାହରଣ ସମାଧାନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 19.1

sine ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a\cos\frac{B-C}{2} = (b+c)\sin\frac{A}{2}$

ସମାଧାନ : ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= (b+c)\sin\frac{A}{2}$

ଆମେ ଜାଣୁ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ (ମନେକରାଯାଉ)

$\Rightarrow a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$

ଏଣୁ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= (k\sin B + k\sin C)\sin\frac{A}{2}$

$= k(\sin C - \sin C)\sin\frac{A}{2}$

$= k \cdot 2\sin\frac{B+C}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2} \qquad [\because A+B+C=\pi]$

$\therefore \sin\frac{B+C}{2} = \sin\left(90^0 - \frac{A}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= 2 \cdot k\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2} \cdot \sin\frac{A}{2}$

$= k\sin A \cdot \cos\frac{B-C}{2}$

$= a\cos\frac{B-C}{2} =$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 19.2

sine ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର :

$$a(\cos C - \cos B) = 2(b-c)\cdot\cos^2\frac{A}{2}$$

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ (ମନେକରାଯାଉ)}$$

$\Rightarrow a = k \sin A,\ b = k \sin B,\ c = k \sin C$

$\therefore$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= 2k(\sin B - \sin C)\cdot\cos^2\frac{A}{2}$

$$= 2k\cdot 2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= 4k\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= 2a\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$= 2a\sin\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}$$

$= a(\cos C - \cos B) =$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 19.3

ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜରେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$a \sin A - b \sin B = c \sin (A-B)$

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ (ମନେକରାଯାଉ)}$$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= k \sin A \sin A - k \sin B \sin B$

$= k[\sin^2 A - \sin^2 B]$

$= k \sin (A+B)\cdot\sin (A-B)$

$A + B = \pi - C \Rightarrow \sin (A+B) = \sin (\pi - C) \Rightarrow \sin (A+B) = \sin C$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= k \sin C\cdot\sin (A-B)$

$= c \sin (A-B) =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 19.4

ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜରେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$a(b \sin C - c \cos B) = b^2 - c^2$

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$ (ମନେକରାଯାଉ)

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = k isn A (k sin B·cos C – k sin C·cos B)

$= k^2 \cdot \sin A[\sin (B–C)]$

$= k^2 \cdot \sin(B+C) \cdot \sin(B–C)$ [$\because$ sin A = sin (B+C)]

$= k^2 \cdot (\sin^2 B – \sin^2 C)$

$= k^2 \sin^2 B – k^2 \sin^2 C$

$= b^2 – c^2$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 19.1

1. sine–ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ?

(i) $\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$ (ii) b cos B + c cos C = a cos (B–C)

(iii) $a\sin\frac{B-C}{2} = (b-c)\cos\frac{A}{2}$ (iv) $\frac{b+c}{b-c} = \tan\frac{B+C}{2} = \cot\frac{B-C}{2}$

(v) a cos A + b cos B + c cos C = 2a sin B sin C

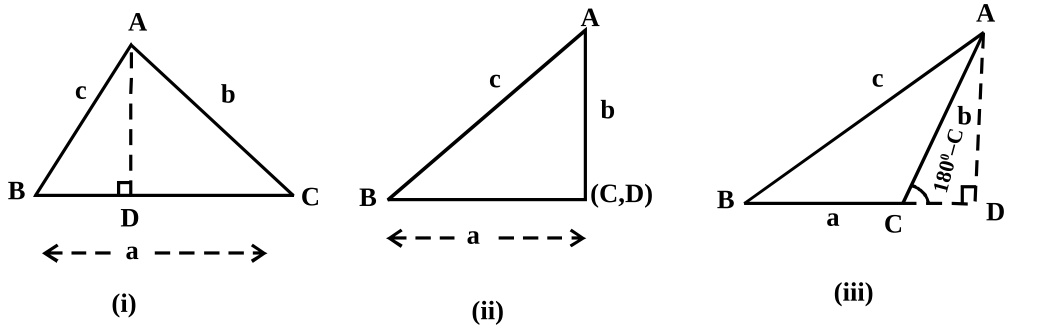
2. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

19.2 cosine ସୂତ୍ର

ଫଳାଫଳ 2 : ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ii) $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ (iii) $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

ପ୍ରମାଣ :



ଚିତ୍ର 19.2

ନିମ୍ନ ପରିସ୍ଥିତି ମାନ ଉପୁଜିଥାଏ :

(i) ଯେତେବେଳେ $\angle C$ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ (ii) ଯେତେବେଳେ $\angle C$ ଏକ ସମକୋଣ

(iii) ଯେତେବେଳେ $\angle C$ ସ୍ଥୁଳକୋଣ

ଏହି ପରିସ୍ଥିତି ଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ନେଇ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପ୍ରଥମ ପରିସ୍ଥିତି : ଯେତେବେଳେ $\angle C$ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ

$$\frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = b \sin C$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $BD = BC - DC = a - b\cos C \quad \left[\because \frac{DC}{b} = \cos C\right]$

ଚିତ୍ର 19.2(i) ରେ,

$c^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2$

$= b^2\sin^2 C + a^2 + b^2 \cos^2 C - 2ab \cos C$

$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି : ଯେତେବେଳେ $\angle C = 90^0$

$c^2 = AD^2 + BD^2 = b^2 + a^2$

$\because C = 90^0 \Rightarrow \cos C = 0$

$\therefore c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos$

$$\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

ତୃତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି : ଯେତେବେଳେ $\angle C$ ସ୍ଥୁଳକୋଣ

$$\frac{AD}{AC} = \sin(180^0 - C) = \sin C$$

$\therefore AD = b \sin C$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $BD = BC + CD = a + b \cos (180^0 - c)$

$= a - b \cos C$

$\therefore c^2 = (b \sin C)^2 + (a - b \cos C)^2$

$= a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

$$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\therefore$ ତିନୋଟି ଯାକ ପରିସ୍ଥିତି, $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

ପୂର୍ବପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ପାଇଁ ଆସ କିଛି ଉଦାହରଣ ସମାଧାନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 19.5

ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜ ABC ରେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ,

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ : $= \dfrac{b+c^2-a^2}{2abc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2abc}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

$$=\frac{1}{2abc}[b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2]$$

$=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}=$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 19.6

Δ ABC ରେ $\angle A = 60^0$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (a+b+c) (b+c–a) = 3bc

ସମାଧାନ : $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ... (i)

$$A = 60^{0.} \Rightarrow \cos A = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ (i) ରୁ ମିଳିବ $\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow b^2+c^2-a^2 = bc$

ବା $b^2 + c^2 + 2bc - a^2 = 3bc \Rightarrow (b+c)^2 - a^2 = bc$

ବା (b+c+a) (b+c–a) = 3bc

ଉଦାହରଣ 19.7

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତିନୋଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 3 ସେ.ମି., 5 ସେ.ମି. ଓ 7 ସେ.ମି. ହେଲେ, ଏହାର ବୃହତ୍ତମ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ a = 3 ସେ.ମି., b = 5 ସେ.ମି. ଓ c = 7 ସେ.ମି. । ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ହେଉଛି ବୃହତ୍ତମ ।

$\therefore \angle C$ ହେଉଛି ବୃହତ୍ତମ କୋଣ

$$\therefore \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{9+25-49}{30} = \frac{-15}{30} = -\frac{1}{2}$$

$$\because \cos = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{3}$$

$\therefore$ ତ୍ରିଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ କୋଣ ହେଉଛି $\frac{2\pi}{3}$ ବା 120^0 ।

ଉଦାହରଣ 19.8

ΔABC ରେ $\angle A = 60^0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1$

ସମାଧାନ : $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\Rightarrow \cos 60^0 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = bc$

ବା $b^2 + c^2 = a^2 + bc$ ... (i)

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

$$= \frac{ab+b^2+c^2+ac}{(c+a)(a+b)}$$

$$= \frac{ab+a^2+bc+ac}{(c+a)(a+b)} = \frac{a^2+ab+ac+bc}{(c+a)(a+b)}$$ [(i) ଅନୁଯାୟୀ]

$$= \frac{a(a+b)+c(a+b)}{(c+a)(a+b)} = \frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)} = 1$$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 19.2

1. ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜ ABCରେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ

(i) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0$

(ii) $(a^2-b^2+c^2)\tan B = (b^2-c^2+a^2)\tan C = (c^2-a^2+b^2)\tan A$

(iii) $\frac{k}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

ଯେଉଁଠି $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$

(iv) $(b^2-c^2)\cot A + (c^2-a^2)\cot B + (a^2-b^2)\cot + c = 0$

2. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛନ୍ତି, a=9 ସେ.ମି., b=8 ସେ.ମି., c=4 ସେ.ମି. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $6\cos C = 4 + 3\cos B$

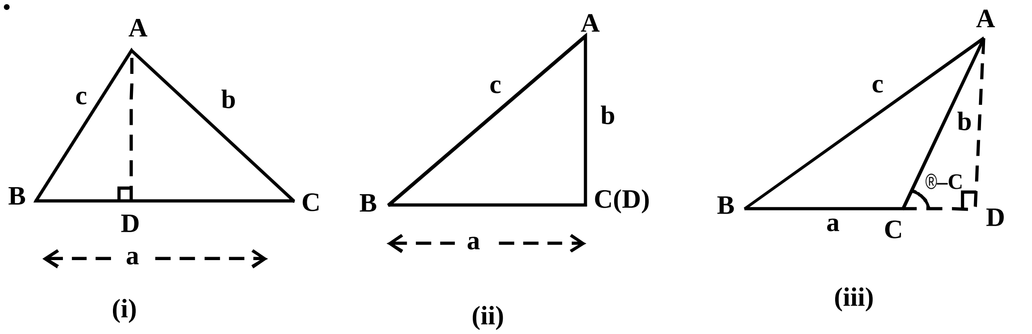
19.3 ଅଭିକ୍ଷେପ ସୂତ୍ର (Projection formula)

ଫଳାଫଳ - 3 : ΔABCରେ BC = a, CA = b ଏବଂ AB = c ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$ (iii) $c = a\cos B + b\cos A$

ପ୍ରମାଣ :



ଚିତ୍ର 19.2

ପୂର୍ବ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯେପରି ତିନୋଟି ପରିସ୍ଥିତି ଥିଲା, ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ ତିନୋଟି ପରିସ୍ଥିତି ନେଇ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

(i) ଯେତେବେଳେ $\angle C$ କୋଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ :

Δ ADBରେ, $\frac{BD}{c}=\cos B \Rightarrow BD = c\cos B$

Δ ADBରେ, $\frac{BD}{c}=\cos B \Rightarrow BD = c\cos B$

Δ ADCରେ, $\frac{DC}{b}=\cos C \Rightarrow DC = b\cos C$

$a = BD + DC = c \cos B + b \cos C$

$a = c \cos B + b \cos C$

(ii) ଯେତେବେଳେ $\angle C = 90^0$

$$a = BC = \frac{BC}{AB} \times AB = \cos B \times C = c \cos B + 0$$

$= c \cos B + b \cos 90^0$ [$\because \cos 90^0 = 0$]

$= c \cos B + b \cos C$

(iii) ଯେତେବେଳେ $\angle C$ କୋଣ ସ୍ଥୁଳକୋଣ :

Δ ADBରେ, $\frac{BD}{c} = \cos B \Rightarrow BD = c \cos B$

Δ ADCରେ, $\frac{CD}{b} = \cos(\pi - c) = -\cos C$

$\Rightarrow CD = -b \cos C$

ଚିତ୍ର 19.3 (iii)ରେ, $BC = BD - CD$

$\therefore a = c \cos B - (-b \cos C) = c \cos B + b \cos C$

ଏଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିସ୍ଥିତିରେ, $a = b \cos C + c \cos B$ ।

ସେହିପରି ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ

$b = c \cos A + a \cos C$ ଏବଂ $c = a \cos B + b \cos A$

ଆସ ଉପରୋକ୍ତ ଫଳାଫଳକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି କିଛି ଉଦାହରଣ ସମାଧାନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 19.9

ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜ ABC ରେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$(b+c) \cos A + (c+a) \cos B + (a+b) \cos C = a+b+c$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= b \cos A + c \cos A + c \cos B + a \cos B + a \cos C + b \cos C$

$= (b \cos A + a \cos B) + (c \cos A + a \cos C) + (c \cos B + b \cos C)$

$= c + b + a$

$= a + b + c =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 19.10

ଯେକୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜରେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\frac{\cos 2A}{a^2} - \frac{\cos 2B}{b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \frac{1 - 2\sin^2 A}{a^2} - \frac{1 - 2\sin^2 B}{b^2}$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{2\sin^2 A}{a^2}-\frac{1}{b^2}+\frac{2\sin^2 B}{b^2}$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-2k^2+2k^2=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2} \qquad \left[\therefore \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=K\right]$$

= ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 19.11

Δ ABCରେ, ଯଦି a cos A = b cos B ଯେଉଁଠି $a \neq b$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ସମାଧାନ : a cos A = b cos B

$$\therefore\ a\left[\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]=b\left[\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right]$$

ବା $a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(c^2+a^2-b^2)$

ବା $a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = b^2c^2 + a^2b^2 - b^4$

ବା $c^2(a^2-b^2) = (a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$\Rightarrow c^2 = a^2+b^2$

$\therefore$ ΔABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ଉଦାହରଣ 19.12

ΔABC ରେ a = 2, b = 3, c = 4 ହେଲେ ।

cos A, cos B ଓ cos C ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+16-4}{2\times3\times4}=\frac{21}{24}=\frac{7}{3}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{16+4-9}{2\times4\times2}=\frac{11}{16}$$

ଏବଂ $$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4+9-16}{2\times2\times3}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 19.3

1. ΔABC ରେ a = 3, b = 4 ଓ c = 5 ହେଲେ, cos A, cos B ଓ cos C ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟ 7 ସେ.ମି., $4\sqrt{3}$ ସେ.ମି. ଓ $\sqrt{13}$ ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ କୋଣଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. a : b : c = 7 : 8 : 9 ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ cos A : cos B : cos C = 14 : 11 : 6

4. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟ $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ ଓ $x^2 – 1$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏହାର ବୃହତ୍ତମ କୋଣ ହେଉଛି 120^0 ।

5. ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ b cos A = a cos B ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏହା ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

6. ଅଭିକ୍ଷେପ-ସୂତ୍ରରୁ sine-ସୂତ୍ର ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଅଜ୍ଞାତ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ ।

sine–ସୂତ୍ର :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

cosine ସୂତ୍ର :

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ଅଭିକ୍ଷେପ ସୂତ୍ର : A

a = b cos C + c cos B

b = C cos A + a cos C

c = a cos B + b cos A

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

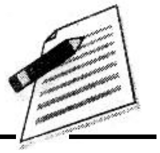
- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

Δ ABC ରେ ପ୍ରଶ୍ନ 1 ରୁ 10 ପ୍ରମାଣ କର :

1. a sin (B–C) + b sin (C–A) + c sin (A–B) = 0

2. a cos A + b cos B + c cos C = 2a sin B sin C



3. $\frac{b^2-c^2}{a^2}\cdot\sin 2A+\frac{c^2-a^2}{b^2}\cdot\sin 2B+\frac{a^2-b^2}{c^2}\cdot\sin 2C=0$

4. $\frac{c^2+a^2}{b^2+c^2}=\frac{1+\cos B\cos(C-A)}{1+\cos A\cos(B-C)}$

5. $\frac{c-b\cos A}{b-c\cos A}=\frac{\cos B}{\cos C}$

6. $\frac{a-b\cos C}{c-b\cos A}=\frac{\sin C}{\sin A}$

7. $(a+b+c)\left[\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right]=2c\cot\frac{C}{2}$

8. $\sin\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{c}\cos\frac{c}{2}$

9. (i) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$

(ii) $a\cos A+b\cos B=c\cos(A-B)$

10. $b^2=(c-a)^2\cos^2\frac{B}{2}+(c+a)^2\sin^2\frac{B}{2}$

11. ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ, $b=5, c=6, \tan\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $a=\sqrt{41}$

12. ଯେକୌଣସି ΔABCର ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b-a\cos C}{a-b\cos C}$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 19.3

1. $\cos A = \frac{4}{5}$

   $\cos B = \frac{3}{5}$

   $\cos C =$ ଶୂନ

2. ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ କୋଣଟି 30^0 ।