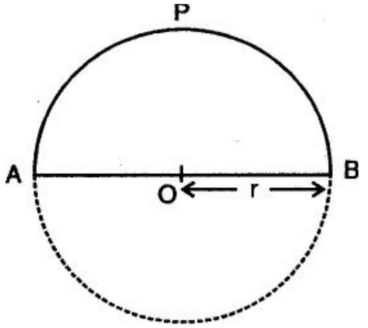
ଟିପ୍ପଣୀ

୩୬

ଗୋଲକ

ତୁମେ ନିଜେ ଖେଳି ଥିବା କିମ୍ବା ପିଲାମାନେ ଖେଳୁଥିବା ଫୁଟବଲ୍, ବାସ୍କେଟ୍‌ବଲ୍ କିମ୍ବା ଟେବୁଲ ଟେନିସ୍ ଦେଖିଥିବ । ଫୁଟବଲ, ବାସ୍କେଟ୍‌ବଲ୍, ଟେବୁଲ୍ ଟେନିସ୍ ବଲ୍ ଗୁଡିକର ଜ୍ୟାମିତିକ ଆକୃତିକୁ ଆମେ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତିରେ ‘‘ଗୋଲକ’’ କହିଥାଉ ।

ଯଦି ଆମେ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ OAPB କୁ ତାହାର ବ୍ୟାସ AB ର ଚାରିପାଖରେ ଘୂରାଇବା, ତେବେ ଏହି ଘୂର୍ଣ୍ଣନରେ ଏକ ଗୋଲକ ସୃଷ୍ଟି ହେବ, ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅଭିନ୍ନ ଏବଂ ଯାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହିତ ସମାନ ହେବ ।



ଚିତ୍ର 36.1

ତେଣୁ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଏକ ଭ୍ରାମ୍ୟମାଣ ବିନ୍ଦୁ, ଏକ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥାଇ ପରିଭ୍ରମଣ କଲେ, ଭ୍ରାମ୍ୟମାଣ ବିନ୍ଦୁର ସଞ୍ଚାର ପଥକୁ ଗୋଲକ କୁହାଯାଏ । ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଲକର **କେନ୍ଦ୍ର** ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାକୁ ଗୋଲକର **ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ** କୁହାଯାଏ ।

ଗୋଟିଏ ଗୋଲକ ଏବଂ ଏକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ହେଉଛି, ଗୋଲକ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଏକ ଆକୃତି ହୋଇଥିବାବେଳେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱିମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ଚିତ୍ର ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ, କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ମାଧ୍ୟମରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ, ଚାରୋଟି ଅଣ-ସମତଳୀୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ, ବ୍ୟାସ ମାଧ୍ୟମରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ, ଗୋଲକର ସାମତଳିକ ଛେଦ ଏବଂ ଏକ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତ ମାଧ୍ୟମରେ ଗୋଲକର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ବିଷୟରେ ପଢିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ପଢି ସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- କେନ୍ଦ୍ର - ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ରୂପରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ସାଧାରଣ ରୂପରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଚାରୋଟି ଅଣ-ସମତଳୀୟ ବିନ୍ଦୁ ମାଧ୍ୟମରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ବ୍ୟାସ ରୂପରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଗୋଲକର ସାମତଳିକ ଛେଦର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କରିପାରିବା ଏବଂ
- ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତ ମାଧ୍ୟମରେ ଗୋଲକର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

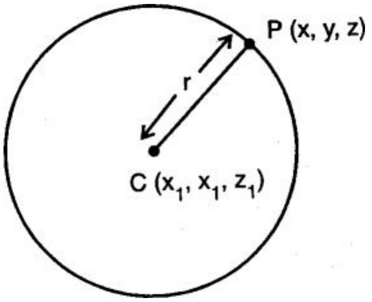
ଟିପ୍ପଣୀ

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଦ୍ୱିମାତ୍ରିକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜ୍ଞାନ,
- ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜ୍ଞାନ,
- ଏକ ସମତଳର ସମୀକରଣର ବିଭିନ୍ନ ରୂପ,
- ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ସରଳରେଖା ।

36.1 କେନ୍ଦ୍ର - ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ରୂପରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ (Equation of a circle in centre-radius form)

ମନେ ପକାଅ ଯେ ଗୋଲକ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାକୁ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 36.2

ମନେକର $P(x, y, z)$, $C(x_1, y_1, z_1)$ କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଲକ ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

ମନେକର ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 'r' ।

$\therefore CP^2 = r^2$ ... (i)

ଦୂରତା ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ (i) କୁ ଲେଖିପାରିବା

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=r^2 \quad \text{... (A)}$$

ଯାହାକି ଗୋଲକର **କେନ୍ଦ୍ର - ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ରୂପ** ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଯଦି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ହୁଏ ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 'r' ହୁଏ, ତେବେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2+y^2+z^2 = r^2$ ... (ii)

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ସମୀକରଣ (A) ହେଉଛି ଚଳରାଶି x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ । ଏଠାରେ ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାରିବା ଯେ :

(a) x^2, y^2 ଏବଂ z^2 ର ସହଗ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ (ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ 1 ସହିତ ସମାନ)

(b) xy, yz ଏବଂ zx ଥିବା ପଦ ନାହିଁ ।

ତେଣୁ ତୁମେ ଦେଖିପାରିବ ଯେ, x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ଏକ ସାଧାରଣ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଏକ ଗୋଲକ ହେବ ଯଦି ଏହା ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

(c) $ax^2+ay^2+az^2+2lx+2my+2nz+d = 0 \ (a \neq 0)$ ....(iii)

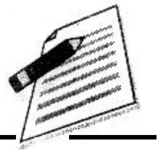
ରୂପରେ ଏକ ସମୀକରଣ ନିଆଯାଉ ।

(iii) ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 'a' ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$x^2+y^2+z^2+2\frac{l}{a}x+2\frac{m}{a}y+2\frac{n}{a}z+\frac{d}{a}=0 \quad \text{... (B)}$$

(B) କୁ ଲେଖିପାରିବା, $x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c = 0$ ...(iv)

ଯେଉଁଠି, $g=\frac{l}{a}, f=\frac{m}{a}, h=\frac{n}{a}$ ଏବଂ $c=\frac{d}{a}$



ସମୀକରଣ (iv) କୁ ଲେଖିପାରିବା

$$(x+g)^2+(y+f)^2+(z+h)^2 = g^2+f^2+h^2-c \qquad \ldots (v)$$

(v)କୁ ଉପରିସ୍ଥ (A) ସହିତ ତୁଳନା କଲେ, ଗୋଲକ (iv) ର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ (–g, –f, –h) ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ

$= \sqrt{g^2+f^2+h^2-c}$ ହେବ ।

ସମୀକରଣ (iv) କୁ ଆମେ ଗୋଲକର ସାଧାରଣ ରୂପ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ବୋଲି କହିବା ।

ଯଦି $g^2+f^2+h^2-c \geq 0$ ହୁଏ, ତେବେ ଗୋଲକଟି ବାସ୍ତବ ହେବ ।

(d) ଯେତେବେଳେ $r = 0$ ହେବ, ଗୋଲକ ଏକ ବିନ୍ଦୁ-ଗୋଲକ ହେବ ।

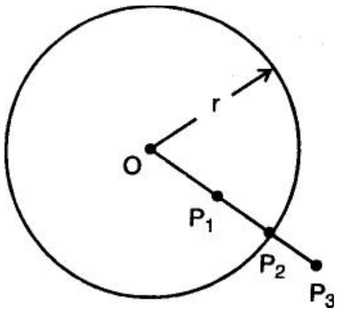
(e) ଯେଉଁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର, (iv) ରେ ଥିବା ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ସହ ଅଭିନ୍ନ ହେବ, ତାକୁ ଗୋଲକ (iv) ସହ ଏକ କୈନ୍ଦ୍ରିକ ଗୋଲକ କୁହାଯାଏ । (iv) ରେ ଥିବା ଗୋଲକ ସହ ଏକ କୈନ୍ଦ୍ରିକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେବ

$$x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+k = 0$$

ଯେଉଁଠି 'k' ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଯାହାର ମାନ ଅନ୍ୟ ସର୍ତ୍ତ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ।

36.1.1 ଗୋଲକର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ଏବଂ ବହିଃର୍ଦ୍ଦେଶ (Interior and exterior of a shape)

ମନେକର ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର 'O' ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 'r' । ଏକ ବିନ୍ଦୁ P_1, ଗୋଲକର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ଯଦି $OP_1 < r$ । ବିନ୍ଦୁ P_2 ଗୋଲକ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ ଯଦି $OP_2 = r$ ଏବଂ ବିନ୍ଦୁ P_3 ଗୋଲକର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ ଯଦି $OP_3 > r$ ।



ଚିତ୍ର 36.3

ଉଦାହରଣ 36.1

ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 4 ।

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 4^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 16$

ଉଦାହରଣ 36.2

ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର (2, –3, 1) ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{7}$

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(x-2)^2+[y-(-3)]^2+(z-1)^2 = (\sqrt{7})^2$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2 = 7$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+6y+9+z^2-2z+1-7 = 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+7 = 0$

ଉଦାହରଣ 36.3

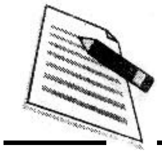
$2x^2+2y^2+2z^2-4x+8y-6z-19 = 0$ ଏକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଲେ, ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$2x^2+2y^2+2z^2-4x+8y-6z-19 = 0$

ମଡ୍ୟୁଲ-I

ଭେକ୍ଟର ଏବଂ
ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି



ଟିପ୍ପଣୀ

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y-3z-\frac{19}{2}=0$$

$\therefore$ ଏଠାରେ $g = -1,\ f = 2,\ h=-\frac{3}{2}, c=-\frac{19}{2}$

କେନ୍ଦ୍ର $= (-g, -f, -h) = (1, -2, \frac{3}{2})$

ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $=\sqrt{g^2+f^2+h^2-c}=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{2}}$

$$=\sqrt{1+4+\frac{9}{4}+\frac{19}{2}}=\frac{\sqrt{67}}{2}$$

ଉଦାହରଣ 36.4

(2, 3, 6) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏବଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ର ଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର (0, 0, 0) ଏବଂ ଗୋଲକ (2, 3, 6) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଛି ।

$\therefore$ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = (0, 0, 0) ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ (2, 3, 6) ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା

$$=\sqrt{(2-0)^2+(3-0)^2+(6-0)^2}$$

$$=\sqrt{4+9+36}$$

$$=\sqrt{49}=7$$

$\therefore$ ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2 = 7^2$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 = 49$

ଉଦାହରଣ 36.5

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2 = 0$ ଗୋଲକ କ୍ଷେତ୍ରରେ (2, 3, 4) ବିନ୍ଦୁଟି ଗୋଲକର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କିମ୍ବା ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2 = 0$

ଏଠାରେ, $g = -1,\ f = 2,\ h = -3$ ଏବଂ $c = -2$

$\therefore$ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର = (1, –2, 3)

ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $=\sqrt{1+4+9+2}=4$

ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର (1, –2, 3) ଠାରୁ (2, 3, 4) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

$$=\sqrt{(2-1)^2+(3+2)^2+(4-3)^2}$$

$$=\sqrt{1+25+1}=3\sqrt{3}$$

ଯେହେତୁ $3\sqrt{3}>4$, ତେଣୁ (2, 3, 4) ବିନ୍ଦୁଟି ଗୋଲକର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.1

1. ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5 ଏକକ ।

2. $3x^2+3y^2+3z^2-3x+6y-9z-17 = 0$ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ସେହି ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯିଏ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ ଏବଂ

   (i) ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର (3, –3, –1), (ii) ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର (2, –2, –1) ।

4. ସେହି ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର (3, –3, –1) ଏବଂ ଯିଏ (5, –2, 1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ ।

5. ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2-6x+8y-2z+1 = 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ନିମ୍ନ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଗୋଲକର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ, ବହିଃସ୍ଥ କିମ୍ବା ଗୋଲକ ଉପରିସ୍ଥ ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) (2, –3, 4) (ii) (–1, –4, –2) (iii) (–1, 2, 3)

36.2 ଚାରୋଟି ଅଣ-ସମତଳୀୟ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ (Equation of a sphere through four non-coplanar points)

ମନେ ପକାଅ ଯେ ଗୋଲକର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c = 0$ ... (i)

ଏଥିରେ ଚାରୋଟି ଧ୍ରୁବକ g, f, h ଏବଂ c ଅଛି । ଯଦି କୌଣସି ପ୍ରକାରେ ଆମେ ଏହି ଧ୍ରୁବକ ଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରନ୍ତି, ତେବେ ଆମେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ପାଇପାରିବା ।

ଯଦି ଦିଆଯାଇଛି ଯେ ଗୋଲକଟି ଚାରୋଟି ଅଣ-ସମତଳୀୟ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଛି, ତେବେ ଏଥିରୁ ଆମେ ଚାରୋଟି ସମୀକରଣ ପାଇବା ଯାହାକୁ ସମାଧାନ କରି ଆମେ ଚାରୋଟି ଧ୍ରୁବକର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବା ।

ମନେକର ଚାରୋଟି ଅଣ-ସମତଳୀୟ ବିନ୍ଦୁହେଲେ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ଏବଂ (x_4, y_4, z_4) ।

ଏହି ଚାରୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ (i) ସିଦ୍ଧ ହେବ ଯେହେତୁ ଏମାନେ ଗୋଲକ ଉପରିସ୍ଥ ।

$$\therefore x_1^2+y_1^2+z_1^2+2gx_1+2fy_1+2hz_1+c=0 \quad \text{... (i)}$$

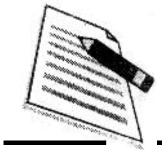
$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+2gx_2+2fy_2+2hz_2+c=0 \quad \text{... (ii)}$$

$$x_3^2+y_3^2+z_3^2+2gx_3+2fy_3+2hz_3+c=0 \quad \text{... (iii)}$$

$$x_4^2+y_4^2+z_4^2+2gx_4+2fy_4+2hz_4+c=0 \quad \text{... (iv)}$$

ସମୀକରଣ (1), (2), (3) ଏବଂ (4) କୁ ସମାଧାନ କଲେ ଆମେ g, f, h ଏବଂ c ର ମୂଲ୍ୟ ପାଇପାରିବା । ଏହି ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣ (i) ରେ ବସାଇଲେ ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେବ

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ଭେକ୍ଟର ଏବଂ
ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି



ଟିପ୍ପଣୀ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ଟୀକା : ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନେ ଏହି ଡିଟରମିନାଣ୍ଟକୁ ସରଳ କରି ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 36.6

(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) ଏବଂ (0, 0, 1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଏହି ଚାରୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c = 0$ ... (i)

ଯେହେତୁ ଏହା (0, 0, 0) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ, ତେଣୁ

$c = 0$

$\because$ (1, 0, 0) ବିନ୍ଦୁଟି ଗୋଲକ ଉପରିସ୍ଥ, ତେଣୁ (i) କୁ (1, 0, 0) ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ କଲେ, ପାଇବା

$1+0+0+2g+0+0+0 = 0$

$\Rightarrow g = -\frac{1}{2} \quad (\because c = 0)$

ସେହିପରି (i) କୁ (0, 1, 0) ଏବଂ (0, 0, 1) ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$f = -\frac{1}{2}, h = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ସମୀକରଣ (i) ରେ g, f, h ଏବଂ c ର ମାନ ବସାଇଲେ ପାଇବା,

$x^2+y^2+z^2-x-y-z = 0$ ଯାହା ହେଉଛି ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ।

$\therefore$ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ଉଦାହରଣ 36.7

ମୂଳବିନ୍ଦୁ, (2, 1, –1), (1, 5, –4) ଏବଂ (–2, 4, –6) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଗୋଲକର ସମୀକରଣ

$x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c = 0$ ... (i)

ଯେହେତୁ ଏହା (0, 0, 0) ଦେଇ ଯାଉଛି, ତେଣୁ $c = 0$

ପୁନଶ୍ଚ, ଗୋଲକ (i) (2, 1, –1) ଦେଇ ଯାଇଛି, ତେଣୁ

$2^2+1^2+(-1)^2+4g+2f-2h = 0$

$\Rightarrow 6+4g+2f-2h = 0$

$\Rightarrow 3+2g+f-h = 0$ ... (ii)

ସେହିପରି, ଗୋଲକ (i) (1, 5, –4) ଏବଂ (–2, 4, –6) ଦେଇ ଯାଏ, ତେଣୁ

$42+2g+10f-8h = 0$ ... (iii)

$56-4g+8f-12h = 0$ ... (iv)

(ii) ରୁ 'h' ର ମୂଲ୍ୟ ନେଇ (iii) ଏବଂ (iv) ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$42+2g+10f-8(3+2g+f) = 0$

$\Rightarrow 18-14g+2f = 0$

$\Rightarrow 9-7g+f = 0$ ... (v)

ଏବଂ $56-4g+8f-12(3+2g+f) = 0$

$\Rightarrow 20-28g-4f = 0$

$\Rightarrow 5-7g-f = 0$ ... (vi)

(v) ଏବଂ (vi) କୁ ସମାଧାନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା $g = 1, f = -2$, ପୁନଶ୍ଚ $g = 1$ ଓ $f = -2$ ମାନକୁ (ii) ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା $h = 3$

$\therefore$ ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z = 0$

$\therefore$ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର = (–1, 2, –3)

$\because$ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{(1)^2+(-2)^2+3^2-0} = \sqrt{14}$

ଉଦାହରଣ 36.8

ଯେଉଁ ଗୋଲକ (2, 3, 0), (3, 0, 2), (0, 1, 3) ଏବଂ (2, 2, 0) ବିନ୍ଦୁମାନ ଦେଇ ଯାଏ ତା'ର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 2^2+3^2+0^2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3^2+0^2+2^2 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0^2+1^2+3^2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2^2+2^2+0^2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 13 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 13 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଟିପ୍ପଣୀ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.2

1. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଚାରୋଟି ଅଣ-ସମତଳୀୟ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

   (i) (0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) ଏବଂ (0, 0, c)

   (ii) (0, 0, 0), (–a, b, c), (a, –b, c) ଏବଂ (a, b, –c)

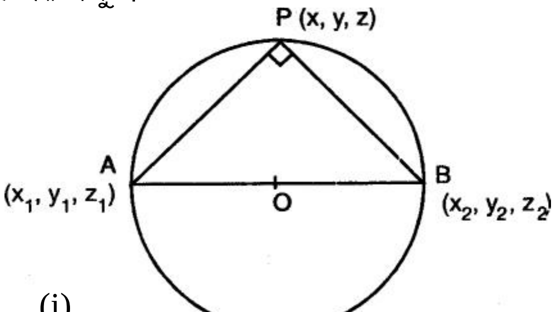
   (iii) (0, 0, 0), (0, 2, –1), (–1, 1, 0) ଏବଂ (1, 2, –3)

   ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. (1, –1, –1), (3, 3, 1), (–2, 0, 5) ଏବଂ (–1, 4, 4) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

36.3 ବ୍ୟାସ ରୂପରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ (Diameter form of the eqation of a sphere)

ମନେକର $A(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $B(x_2, y_2, z_2)$ ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର O । ମନେକର P(x, y, z) ଗୋଲକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।



ଚିତ୍ର 36.4

∴ PA ଏବଂ PB ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

PA ଏବଂ PB ର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ ଯଥାକ୍ରମେ

$x-x_1, y-y_1, z-z_1$ ଏବଂ $x-x_2, y-y_2, z-z_2$ ।

ଯେହେତୁ PA ଏବଂ PB ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ତେଣୁ

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2) = 0 \quad \text{... (i)}$$

ଏହା ହେଉଛି ବ୍ୟାସ ରୂପରେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ

ମନେରଖ : ସମୀକରଣ (i) କୁ ଲେଖିପାରିବା

$$x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y-(z_1+z_2)z+x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 = 0 \quad \text{...(A)}$$

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : ବର୍ତ୍ତମାନ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ଏକ ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଯେହେତୁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର 'O', ଏହା AB ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । ତେଣୁ 'O' ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

ଏବଂ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \frac{1}{2}\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

∴ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\left(x-\frac{(x_1+x_2)}{2}\right)^2+\left(y-\frac{(y_1+y_2)}{2}\right)^2+\left(z-\frac{(z_1+z_2)}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\right]$$

$$=\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2+\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)^2$$

ଯାହାକୁ ସରଳ କଲେ ପାଇବା

$$x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y-(z_1+z_2)z$$

$$+\left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2-\left(\frac{x_2-x_1}{2}\right)^2+\left(\frac{y_2+y_1}{2}\right)-\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)^2+\left(\frac{z_2+z_1}{2}\right)^2-\left(\frac{z_2-z_1}{2}\right)^2\right]=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y-(z_1+z_2)z$$

$$+\frac{1}{4}(4x_1x_2+4y_1y_2+4z_1z_2)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y-(z_1+z_2)z+(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)=0$$

ଯାହାକି ପୂର୍ବୋକ୍ତ (A) ସହିତ ସମାନ ।

ଉଦାହରଣ 36.9

ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର ଏକ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (2, 3, 5) ଏବଂ (–4, 7, 11) ହେଲେ, ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$(x-2)(x+4)+(y-3)(y-7)+(z-5)(z-11)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2x-10y-16z+68=0$$

ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର (–1, 5, 8) ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $=\sqrt{(-1)^2+5^2+8^2-68}=\sqrt{22}$

ଉଦାହରଣ 36.10

ଯଦି ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2-2x-6y-2z+2=0$ ର ଏକ ବ୍ୟାସର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (3, 4, –1) ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବ୍ୟାସର ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x_1, y_1, z_1)

$\therefore$ (3, 4, –1) ଏବଂ (x_1, y_1, z_1) କୁ ବ୍ୟାସର ଦୁଇ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେବ

$$(x-x_1)(x-3)+(y-y_1)(y-4)+(z-z_1)(z+1)=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-(x_1+3)x-(y_1+4)y$$

$$-(z_1-1)z+3x_1+4y_1-z_1=0 \qquad \text{... (i)}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ (i) ହେଉଛି ଦତ୍ତ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ

$x^2+y^2+z^2-2x-6y-2z+2=0$ ସହ ଅଭିନ୍ନ ... (ii)

(i) ଏବଂ (ii) ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ସହଗକୁ ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$x_1+3 = 2 \quad \Rightarrow x_1 = -1$

$y_1+4 = 6 \quad \Rightarrow y_1 = 2$

$z_1-1 = 2 \quad \Rightarrow z_1 = 3$

ଏବଂ $3x_1+4y_1-z_1 = 2$ ... (iii)

$x_1 = -1, y = 2, z_1 = 3$ ସମୀକରଣ (iii) କୁ ମଧ୍ୟ ସିଦ୍ଧ କରୁଛି ।

$\therefore$ ବ୍ୟାସର ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି (–1, 2, 3) ।

ଉଦାହରଣ 36.11

$(x-2)(x-4)+(y-1)(y-3)+(z-2)(z+3) = 0$ ଏକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଲେ, ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ କେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(x-2)(x-4)+(y-1)(y-3)+(z-2)(z+3) = 0$

$\Rightarrow x^2-6x+8+y^2-4y+3+z^2+z-6 = 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-6x-4y+z+5 = 0$

ଏଠାରେ $g = -3, f = -2, h = \frac{1}{2}, c = 5$

$\therefore$ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର $\left(3, 2, -\frac{1}{2}\right)$

ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{3^2+2^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-5}$

$= \sqrt{9+4+\frac{1}{4}-5} = \frac{\sqrt{33}}{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.3

1. ଗୋଲକର ଏକ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   (i) (2, –3, 4) ଏବଂ (–5, 6, –7)
   (ii) (2, –3, 4) ଏବଂ (–1, 0, 5)
   (iii) (5, 4, –1) ଏବଂ (–1, 2, 3)
   ଆହୁରି ମଧ୍ଯ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-7 = 0$ ହେଉଛି ଏକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ । ଏହାର ଏକ ବ୍ୟାସର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (–1, 2, 4) ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

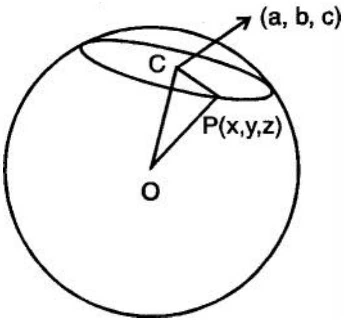
3. ଏକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ $(x+1)(x+2)+(y-3)(y-5)+(z-7)(z+3) = 0$ ହେଲେ, ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

36.4 ଏକ ଗୋଲକର ସମତଳ-ଛେଦ ଏବଂ ଏକ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ (Plane section of a sphere and sphere through a given circle)

(i) ଆସ ପ୍ରଥମେ ଗୋଲକର ସମତଳ - ଛେଦ କଥା ବିଚାର କରିବା ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, ମୂଳବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ 'r' କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଗଠିତ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2+y^2+z^2 = r^2$ ... (i)



ଚିତ୍ର 36.5

ମନେକର ଗୋଲକର ସମତଳ-ଛେଦ ଅଂଶର କେନ୍ଦ୍ର C(a, b, c) । ଏହି ଛେଦର ସମୀକରଣ ଆମେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । O ରୁ C(a, b, c) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ସମତଳ ପ୍ରତି OC ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ସମତଳ ପ୍ରତି OC ନର୍ମାଲ । ନର୍ମାଲ OC ର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ ହେଉଛି a, b ଏବଂ c ।

ମନେକର ଗୋଲକର ସମତଳ-ଛେଦ ଉପରେ P(x, y, z) କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

$\therefore$ PC ର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ ହେଉଛି $x-a$, $y-b$, $z-c$ ଏବଂ ଏହା OC ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ତେଣୁ ଲମ୍ବର ସର୍ତ୍ତ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$(x-a)a+(y-b)b+(z-c)c = 0$ ... (ii)

ସମୀକରଣ (ii) ସମତଳ ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ 'P'ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ । ତେଣୁ (i) ଏବଂ (ii) ଏକତ୍ର, ଗୋଲକର ସମତଳ ଛେଦିତ ଅଂଶର ସମୀକରଣ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଯଦି ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର $(-g, -f, -h)$ ହୁଏ, ତେବେ OC ର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ ହେବ $a+g$, $b+f$, $c+h$ ।

ତେଣୁ $(x-a)(a+g)+(y-b)(b+f)+(z-c)(c+h) = 0$ ... (A)

ଏବଂ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେବ $x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+d = 0$ ... (B)

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ (A) ଏବଂ (B) ଏକତ୍ର ଗୋଲକର ସମତଳ ଛେଦିତ ଅଂଶର ସମୀକରଣ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଗୋଟିଏ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଏକ ସମତଳ ଗୋଲକକୁ ଛେଦ କଲେ, ଯେଉଁ ଛେଦିତ ଅଂଶ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେବ, ତାକୁ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ ଦେଖି ପାରିବ :

(i) ଏହି ଛେଦିତ ଅଂଶ (ବୃତ୍ତ)ର କେନ୍ଦ୍ର ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ସହ ମିଳିଯିବ । ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ଗୋଲକର ସମସ୍ତ ସମତଳ-ଛେଦରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ବୃତ୍ତ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବୃହତ୍ତମ ହେବ ।

(ii) ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହିତ ସମାନ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ **ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଧାରଣ କରିଥିବା ଗୋଲକ ବିଷୟରେ ବିଚାର କରିବା ।**

(iii) **ଏକ ଗୋଲକ ନିଆଯାଉ**

$S \equiv x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c = 0$ ... (i)

ଏବଂ ଏକ ସମତଳ $L \equiv lx+my+nz+k = 0$ ... (ii)

(i) ଏବଂ (ii) ଏକତ୍ର ହେବ S = 0 ଏବଂ L = 0 ର ଛେଦରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ।

ବୃତ୍ତ (i) ଏବଂ (ii) ଉଭୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $S+\lambda L = 0$, ଯେଉଁଠି λ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଏବଂ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା $S+\lambda L = 0$ ସମୀକରଣ ସିଦ୍ଧ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 36.12

$x^2+y^2+z^2-6x-4y+12z-36 = 0$, $x+2y-2z = 1$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର

$S \equiv x^2+y^2+z^2-6x-4y+12z-36 = 0$ ... (i)

$L \equiv x+2y-2z-1 = 0$ ... (ii)

(i) ଏବଂ (ii) ଏକତ୍ର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣକୁ ସୂଚାଏ ।

ଆମେ ପାଇବା : (ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)^2

= (ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)^2– (ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ରରୁ ସମତଳର ଲମ୍ବ ଦୂରତା)^2

ଗୋଲକ (i) ର କେନ୍ଦ୍ର = (3, 2, –6)

ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{3^2+2^2+(-6)^2+36} = \sqrt{85}$

ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର (3, 2, –6) ରୁ ସମତଳ (ii) ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଦୂରତା

$$= \frac{1\times 3+2\times 2-2(-6)-1}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}} = 6$$

$\therefore$ (ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)^2 = 85–36 = 49

$\Rightarrow$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 7

(i) ଏବଂ (ii) ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2+y^2+z^2-6x-4y+12z-36+\lambda(x+2y-2z-1) = 0$

ଏହି ସମୀକରଣକୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା

$x^2+y^2+z^2-(6-\lambda)x-(4-2\lambda)y+(12-2\lambda)z-36-\lambda = 0$ ...(iii)

(iii) ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉଛି $\left(\frac{6-\lambda}{2}, 2-\lambda\, \lambda-6\right)$ ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ

$$= \sqrt{\left(\frac{6-\lambda}{2}\right)^2+(2-\lambda)^2+(\lambda-6)^2+36+\lambda}$$

$$\therefore \left(\frac{6-\lambda}{2}\right)^2+(2-\lambda)^2+(\lambda-6)^2+36+\lambda = 7^2$$

ଟିପ୍ପଣୀ

$$\Rightarrow 36-12\lambda+\lambda^2+4(4-4\lambda+\lambda^2)+4(\lambda^2-12\lambda+36)+4(36+\lambda)=196$$

$$\Rightarrow 9\lambda^2-72\lambda+144=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2-8\lambda+16=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-4)^2=0$$

$$\Rightarrow \lambda=4,4$$

$\therefore$ କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left(\frac{6-4}{2},2-4,4-6\right)=(1,-2,-2)$$

ତେଣୁ ବୃତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏବଂ କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ 7 ଏବଂ (1, –2, –2)

ଉଦାହରଣ 36.13

ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଥିପାଇଁ ଦିଆଯାଇଥିବା ବୃତ୍ତ $x^2+y^2+z^2+7y-2z+2=0$ ଏବଂ $2x+3y+4z-8=0$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତ ହେବ ।

ସମାଧାନ : $x^2+y^2+z^2+7y-2z+2=0$ ଏବଂ $2x+3y+4z-8=0$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବୃତ୍ତ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$x^2+y^2+z^2+7y-2z+2+\lambda(2x+3y+4z-8)=0$$

ଏହି ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ହେଉଛି $\left(-\lambda,-\frac{7+3\lambda}{2},1-2\lambda\right)$

ଯେହେତୁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ସମତଳ ଉପରେ ଅଛି, ତେଣୁ କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳର ସମୀକରଣ $2x+3y+4z-8=0$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ ।

$$\therefore -2\lambda-\frac{21+9\lambda}{2}+4-8\lambda=8$$

$$\Rightarrow -4\lambda-21-9\lambda+8-16\lambda=16$$

$$\Rightarrow \lambda=-1$$

$\therefore$ ଗୋଲକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$x^2+y^2+z^2+7y-2z+2-2x-3y-4z+8=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z+10=0$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.4

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (i) $x^2+y^2+z^2-2y-4z-11=0$ ଏବଂ $x+2y+2z=15$

   (ii) $(x-3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=100$ ଏବଂ $2x-2y-z+9=0$

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ସମତଳ $x+2y+2z=20$ ଏବଂ ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=2$ ର ଛେଦରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (2, 4, 5) ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\sqrt{3}$ ଏକକ ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ଗୋଲକ ହେଉଛି ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଏକ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାକୁ ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।
- ଯେଉଁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r, ସେହି ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2 = r^2$

  ଏହାକୁ ଗୋଲକର **କେନ୍ଦ୍ର-ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ** ରୂପ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।
- ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଗୋଲକର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ହେଲେ, ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହୁଏ $x^2+y^2+z^2 = r^2$
- ଚଳରାଶି x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ସାଧାରଣ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଏକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେବ ଯଦି

  (i) x^2, y^2 ଏବଂ z^2 ର ସହଗ ସମାନ

  (ii) କୌଣସି ପଦରେ xy, yz ଏବଂ zx ନଥାଏ ।
- ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c = 0$ ର କେନ୍ଦ୍ର, ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଯଥାକ୍ରମେ $(-g, -f, -h)$ ଏବଂ $\sqrt{g^2+f^2+h^2-c}$
- ଚାରୋଟି ଅଣ-ସମତଳୀୟ ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ଏବଂ (x_4, y_4, z_4) ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

- ଗୋଲକର ଏକ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ (x_2, y_2, z_2) ହେଲେ, ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ହେବ

  $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2) = 0$
- ଏକ ଗୋଲକ ଏବଂ ସମତଳର ଛେଦ ଅଂଶର ସମୀକରଣ $x^2+y^2+z^2 = r^2$ ଏବଂ $a(x-a)+b(y-b)+c(z-c) = 0$ ଏକତ୍ର ଯେଉଁଠି ଗୋଲକର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = r ଏବଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି କେନ୍ଦ୍ର ।
- ଗୋଲକ $S \equiv x^2+y^2+z^2+2gx+2fy+2hz+c = 0$ ଏବଂ ସମତଳ $L \equiv lx+my+nz+k = 0$ ଏକତ୍ର, ଏକ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ହେବ ।

  ଯେଉଁଠି $S = 0$ ଏବଂ $L = 0$ ର ଛେଦ ହେଉଛି ଉପରୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ ।

  ସମୀକରଣ $S+\lambda L = 0$ ହେଉଛି ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ଯାହାକି $S = 0$ ଏବଂ $L = 0$ ଉଭୟର ଛେଦରେ ହେଉଥିବା ବୃତ୍ତକୁ ଧାରଣ କରେ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍‌ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଏକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର (0, 0, 0) ଏବଂ ଯିଏ (2, –2, 3) ଦେଇ ଯାଏ ।
2. ଗୋଲକ $2(x^2+y^2+z^2)-4x+6y-5z = 0$ ର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. ଦତ୍ତ ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11 = 0$ ସହିତ ଏକ କୈନ୍ଦ୍ରିକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 10 ।
4. ଦତ୍ତବିନ୍ଦୁ (1, 2, 3), (2, –3, 5) ଏବଂ (0, 7, 4) ଠାରୁ ଏକ ଭ୍ରାମ୍ୟମାଣ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 147 ହେଲେ, ଭ୍ରାମ୍ୟମାଣ ବିନ୍ଦୁର ସଞ୍ଚାରପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ବିନ୍ଦୁ (1, –1, 3), ଏକ ଦତ୍ତ ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2+2x+4y-6z+5 = 0$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କିମ୍ବା ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. ଚାରୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0) ଏବଂ (0, 0, 3) ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
7. ଯେଉଁ ଗୋଲକର ଏକ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ (–1, 2, –3) ଏବଂ (3, 1, –1) ସେ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
8. ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2-7x-3y+1 = 0$ ର ଏକ ବ୍ୟାସର ଗୋଟିଏ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (4, 5, 1) ହେଲେ, ଏହାର ଅନ୍ୟ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
9. ଏକ ଗୋଲକ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଛି ଏବଂ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗରେ ଏହାର ଛେଦାଂଶ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଏବଂ c ଏକକ ହେଲେ, ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
10. ଯଦି ଏକ ଗୋଲକ $x^2+y^2+z^2 = 49$ କୁ ଏକ ସମତଳ $2x+3y-z-5\sqrt{14}=0$ ଛେଦ କରେ, ତେବେ ଏହାର ବୃତ୍ତ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଛେଦିତ ଅଂଶର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
11. ଏକ ଗୋଲକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଛେଦିତ ବୃତ୍ତ $x^2+y^2+z^2 = 4$, $x+y+4 = 0$ ଏକ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତ ହେବ ।

ଟିପ୍ପଣୀ

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.1

1. $x^2+y^2+z^2 = 5$ 2. କେନ୍ଦ୍ର $\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \sqrt{\frac{55}{6}}$

3. (i) $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2 = 19$
   (ii) $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+1)^2 = 9$

4. $(x-3)^2+(y+3)^2+(z+1)^2 = 9$

5. (i) ଅନ୍ତଃସ୍ଥ (ii) ଗୋଲକ ଉପରିସ୍ଥ (iii) ବହିଃସ୍ଥ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.2

1. (i) $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz = 0, \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$; $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

   (ii) $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0$

   $\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}$

   $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2a}, \frac{a^2+b^2+c^2}{2b}, \frac{a^2+b^2+c^2}{2c}\right)$;

   (iii) $6(x^2+y^2+z^2)+14x+2y+34z = 0$;

   $\left(-\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, \frac{17}{6}\right); \frac{\sqrt{339}}{6}$

2. $$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 19 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 29 & -2 & 0 & 5 & 1 \\ 33 & -1 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.3

1. (i) $x^2+y^2+z^2+3x-3y+3z-56 = 0$; $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right); \frac{\sqrt{251}}{2}$

(ii) $x^2+y^2+z^2-x+3y-9z+18=0$; $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right);\frac{\sqrt{19}}{2}$

(iii) $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z=0$; (2, 3, 1) ; $\sqrt{14}$

2. (3, –6, 2)

3. $\left(-\frac{3}{2}, 4, 2\right); \frac{\sqrt{105}}{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 36.4

1. (i) $(1,3,4);\sqrt{7}$ (ii) (–1, 2, 3) ; 8

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $x^2+y^2+z^2=17$
2. $\left(1,-\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right);\frac{\sqrt{77}}{4}$
3. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-86=0$
4. $x^2+y^2+z^2-2x-4y-8z-10=0$
5. ଗୋଲକର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ
6. $x^2+y^2+z^2-x-2y-3z=0$
7. $x^2+y^2+z^2-2x-3y+4z+2=0$
8. (3, –2, –1)
9. $x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$
10. $2\sqrt{6}$
11. $x^2+y^2+z^2+4x+4y+12=0$